

EXERCICE 1 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(3,2,6)$; $B(1,2,4)$ et $C(4,-2,5)$.

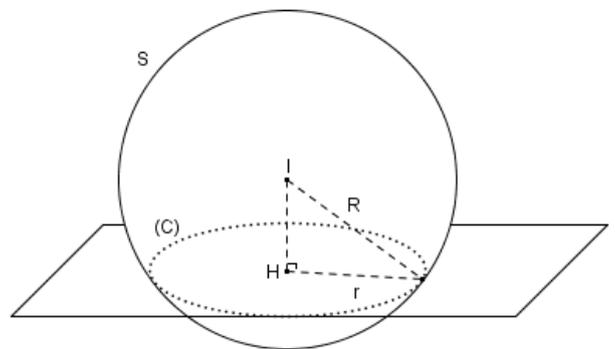
- 1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.
- b) En déduire que les points A , B et C déterminent un plan qu'on notera P.
- c) Montrer qu'une équation du plan P est $2x + y - 2z + 4 = 0$.

- 2) a) Vérifier que les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.
- b) Calculer le volume du tétraèdre OABC, puis sa hauteur issue de O.

- 3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 6$$

- a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
 - b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on précisera le centre H et le rayon r.
- 4) Soit les points $E(0,3,-1)$, $F(4,1,1)$ et $G(-2,1,1)$.
 - a) Montrer que $[FG]$ est un diamètre de S.
 - b) Vérifier que $\overline{EF} \cdot \overline{EG} = 0$.
 - c) Déterminer une équation cartésienne du plan T passant par E et tangent à S.



EXERCICE 2 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(-2,2,1)$, $B(-2,1,2)$, $C(-1,1,1)$ et $\Omega(-1,2,2)$.

- 1) a) Montrer que $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
- b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan (qu'on notera P).
- 2) Montrer alors qu'une équation du plan P est $x + y + z - 1 = 0$
- 3) a) Montrer que les points A, B, C et Ω ne sont pas coplanaires.
- b) Calculer le volume V du tétraèdre ΩABC , puis calculer sa hauteur issue de Ω .
- 4) Montrer que le point Ω appartient à l'axe du cercle C circonscrit au triangle ABC.
- 5) Soit S la sphère de centre $\Omega(-1,2,2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.
 - a) Ecrire une équation cartésienne de S.
 - b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle C.
 - c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle C.

EXERCICE 3 :

A/ Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x + 3}$; $x \in]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$

(C) étant sa courbe selon un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

- 1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en (-3) et à droite en (-1). En déduire une interprétation géométrique.
- 2) a) Montrer que f est dérivable sur $I =]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$
- b) Etablir le tableau de variation de f.

- 3) Montrer que la droite $D : x = -2$ est un axe de symétrie de (C).
- 4) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
- 5) Tracer la courbe (C).

B/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1, +\infty[$.

- 1) Montrer que g réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
- 2) Tracer la courbe (C') de g dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 3) a) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en $2\sqrt{2}$ et calculer $(g^{-1})'(2\sqrt{2})$.
b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur l'intervalle K .
- 4) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.

EXERCICE 4 :

- 1) Soit h la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $h(x) = 1 + \cos x$
 - a) Dresser le tableau de variation de h .
 - b) Montrer que h réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - c) Calculer $h^{-1}(\frac{3}{2})$.
 - d) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $[1, 2[$ et calculer $(h^{-1})'(x)$.
- 2) On considère la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$
Montrer que f admet une primitive sur $[1, 2]$.
- 3) Soit F la primitive de f sur $[1, 2]$ qui s'annule en 2.
On pose $G(x) = F(1 + \cos x)$ pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 - a) Montrer que G dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et montrer que $G'(x) = \cos(2x) - 1$.
 - b) Déduire $G(x)$ pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 - c) Calculer $F(\frac{3}{2})$.

EXERCICE 5 :

Soit $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $x \in [0, +\infty[$

- 1) Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive G de g qui s'annule en 0.
- 2) Soit $H(x) = G(\tan(x))$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$
 - a) Montrer que H est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer $H'(x)$.
 - b) En déduire que $H(x) = x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer $G(\frac{\sqrt{3}}{3})$
- 3) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $K(x) = G(\frac{1}{1+x}) + G(\frac{x}{x+2})$
 - a) Montrer que K est dérivable sur \mathbb{R}_+ et calculer $K'(x)$.
 - b) En déduire que $G(\frac{1}{2}) + G(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$