Prof:Oueslati Aymen Bac “science , Technique “ Tél : 27677722

Produit scalair dans l'espase , Sphère
cour&exercices :)

1°) Définition :

* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est dit repère orthonormé de l'espace ξ si : $\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j} \,;\, \vec{i} \perp \vec{k} \text{ et } \vec{j} \perp \vec{k} \end{cases}$

Le triplet $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ forme une base orthonormée.

* On appelle produit scolaire de 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ le réel défini par :

1°) $\vec{u}\,.\,\vec{u'} = \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{u'}\|.\cos(\alpha)$; où α est la mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u},\vec{u'}\right)$

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont non nuls.

2°) $\vec{u}\,.\,\vec{u'} = 0$ lorsque l'un au moins des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ est nul ou lorsque les deux vecteu sont non nuls et orthogonaux.

* $B = \left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ base orthonormée.

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans B alors : $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{u'} = xx' + yy' + zz'.}$ et $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

2°) Théorèmes :

Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et α, β deux réel, on a :

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u} \quad ; \quad \vec{w}.\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \vec{u}\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,\vec{w} \quad ; \quad \left(\alpha\vec{u}\right).\vec{v} = \alpha\left(\vec{u}\,.\,\vec{v}\right)}$$

$$\boxed{\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} \;;\; \left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} \;;\; \left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2}$$

3°) Equation cartésienne d'un plan – Distance d'un point à un plan :

* Un vecteur non nul est dit normal d'un plan P s'il est orthogonal à tous les vecteurs de P.
  Si $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ est une base de P et $\vec{N}$ un vecteur normal de P alors $\vec{N} \perp \vec{u}$ et $\vec{N} \perp \vec{v}$.

* Une droite D est orthogonale à P si et seulement si $\vec{w}$ le vecteur directeur de D est colinéaire au vecteur normal de P.

* a, b, c et d quatre réels données, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant

  $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est un plan de vecteur normal $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

* P et P' deux plans, d'équations respectives :

  $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ dans un repère orthonormé.

* $\boxed{P \perp P' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0.}$

* $P \parallel P' \Leftrightarrow \vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{N}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$$

* Dans un repère orthonormé, P le plan d'équation : $ax + by + cz + d = 0$.

La distance d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ au plan P est donnée par :

$$\boxed{d(A,P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.}$$

* Dans un repère orthonormé on a :

si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$

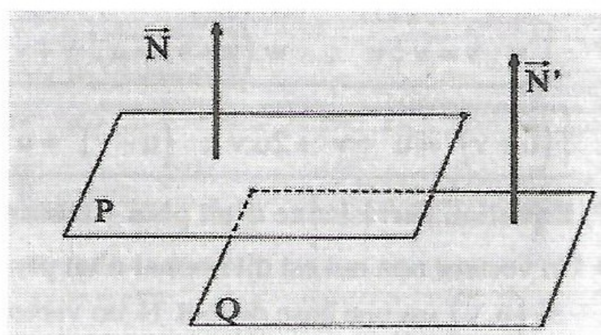
alors $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.}$

4°) les intersections (dans un repère orthonormé) :

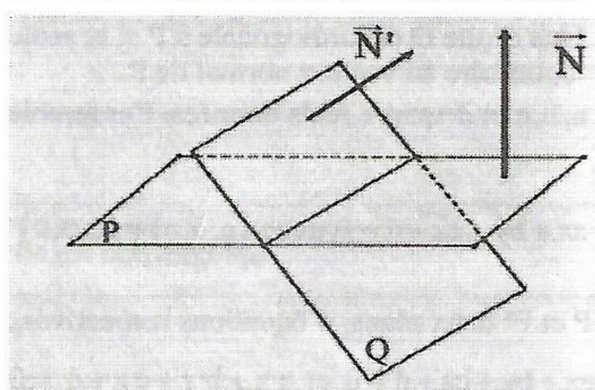
* <u>Positions de deux plans</u> : $P : ax + by + cz + d = 0$; $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur normal de P ; $\vec{N}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ vecteur normal de P'.

- P et Q sont parallèles $\Leftrightarrow \vec{N} = \alpha.\vec{N}' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N}'$ sont colinéaires.
- P et Q sont strictement parallèles $\Leftrightarrow \vec{N} = \alpha.\vec{N}'$ et $\alpha d' \neq d$



- P et Q sont sécant $\Leftrightarrow$ P et Q non parallèles $\Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N}'$ non colinéaires.
- $P \cap Q = \Delta$



* <u>Positions d'une droite d'un plan :</u>

Soit le plan $P: ax+by+cz+d=0$; $\vec{N}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vecteur normal de P.

Soit Δ une droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

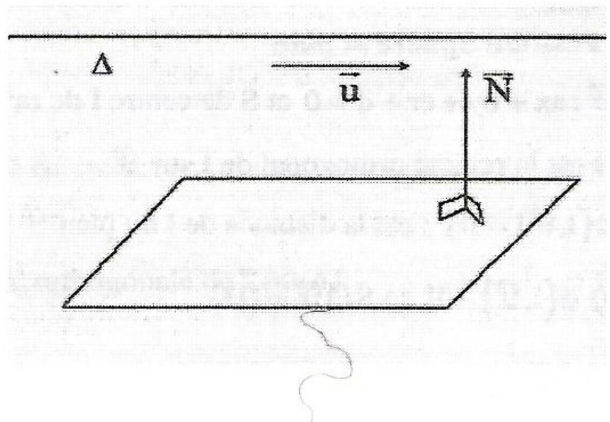
* $\Delta \parallel P \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{N} = 0 \Leftrightarrow \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$

Si de plus $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$

alors $A \in P$ donc $\Delta \subset P$.

Et si $ax_A + by_A + cz_A + d \neq 0$ alors $A \notin P$

donc Δ est parallèle strictement à P.



* Δ coupe $P \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{N} \neq 0$.

* $\Delta \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires

$\Delta \cap P$ est un singleton

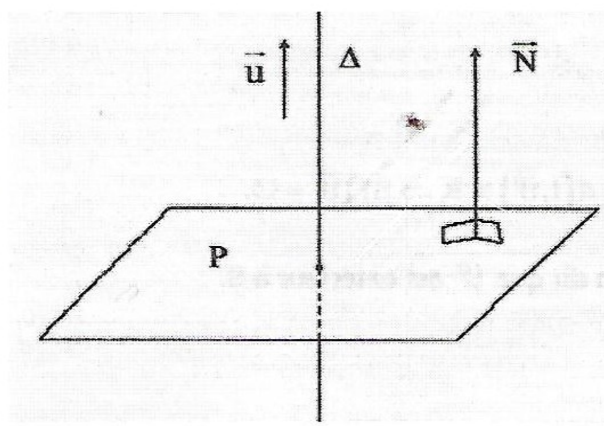
soit : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

une sphère de centre : $I\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$, $R=\sqrt{h}$

si $h = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d > 0$

un singleton : $I \left\{\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)\right\}$ si $h = 0$

, de vide si $h < 0$



II) Sphère

* **Définition**

Soit R un réel strictement positif, I un point de l'espace. L'ensemble des points M de L'espace tels que : $IM = R$ est la sphère de centre I et de rayon R, noté : $S(I, R)$

* **Théorème :**

Soient A et B deux points de l'espace. La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

* **Equation cartésienne d'une sphère :**

Soient $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé, le point $A(x_A,y_A,z_A)$ de l'espace ξ et R un réel strictement positif.

La sphère S de centre A de rayon R est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que :

$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$, c'est l'équation cartésienne de S.

En développons cette équation on obtient alors une équation de la forme :

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

*** Position Sphère et plan**

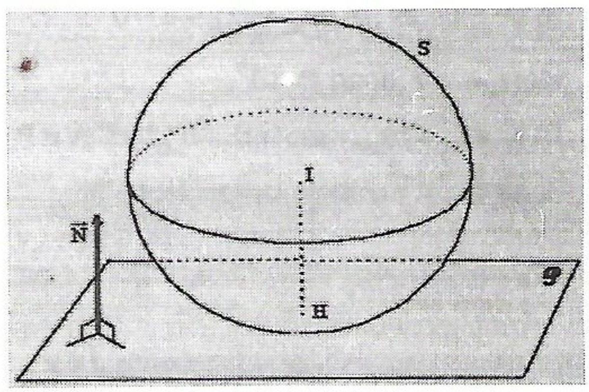
$\mathcal{P}: ax+by+cz+d=0$ et S de centre I de rayon R.

H est le projeté orthogonal de I sur $\mathcal{P}$

$d(I,\mathcal{P})=IH$: est la distance de I au plan $\mathcal{P}$

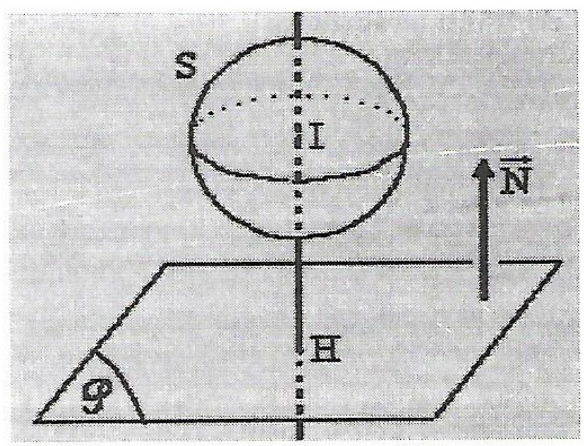
a) $d(I,\mathcal{P})=R \Rightarrow S\cap\mathcal{P}=\{H\}$

On dit que $\mathcal{P}$ est tangente à S.



b) $d(I,\mathcal{P})>R \Rightarrow S\cap\mathcal{P}=\varnothing$.

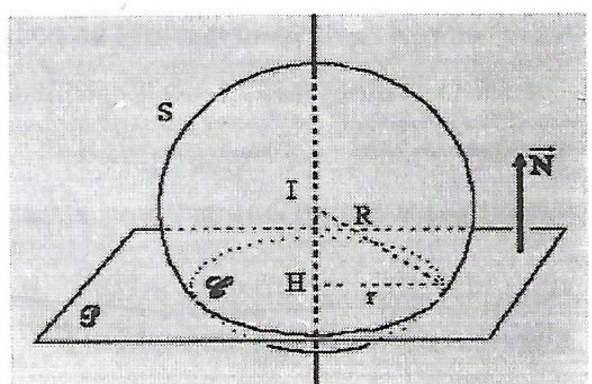
On dit que $\mathcal{P}$ est extérieur à S.



c) Si $d(I,\mathcal{P})<R$ alors $S\cap\mathcal{P}$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre H et de rayon : $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

On dit que $\mathcal{P}$ et S sont sécants.

Il existe un réel α tel que : $\overrightarrow{IH}=\alpha\vec{N}$ où $\vec{N}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$



<u>Remarque</u> : Si $d(I,\mathcal{P})=0$ alors $S\cap\mathcal{P}$ est le grand

cercle de centre I et de rayon R.

* Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

Soit $h=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d.$

a) Si $h>0$ alors $\mathcal{E}$ est la sphère de centre $I\left(\dfrac{-a}{2},\dfrac{-b}{2},\dfrac{-c}{2}\right)$ de rayon $R=\sqrt{h}$

b) Si $h=0$ alors $\mathcal{E}$ est le singleton $\left\{I\left(\dfrac{-a}{2},\dfrac{-b}{2},\dfrac{-c}{2}\right)\right\}$.

c) Le vide si $h<0$.

*** Position relative d'une droite et d'une sphère :**

Soit Δ une droite et S la sphère de centre I et de rayon R.

a) Si $d(I,\Delta)>R$ alors $S\cap\Delta=\varnothing$

b) Si $d(I,\Delta)=R$ alors $S\cap\Delta=\{H\}$ où H est le projeté orthogonale de I sur Δ.

c) Si $d(I,\Delta)<R$ alors $S\cap\Delta=\{A,B\}$

EXERCICE N°1

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(3,4,-2)$; $B(1,6,0)$ et $C(-2,2,1)$.

Montrer que ABC est un triangle rectangle.

EXERCICE N°2

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit les points $A(1,1,3)$; $B(1+\sqrt{2}\ ,\ 0\ ,\ 2)$ et $C(1+\sqrt{2}\ ,\ 2\ ,\ 2)$.

1°) Calculer :AB et AC et évaluer l'angle $\widehat{CAB}$.

2°) Déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE N°3

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1°) Donner une équation du plan P médiateur de $[A,B]$ avec $A(1,2,-1)$ et $B(-3,0,-1)$.

2°) a) Soient les points $E(1,1,0)$ et $F(0,1,3)$ et les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}$

Ecrire les équations paramétriques des droites : $D(E,\vec{u})$ et $\Delta(F,\vec{v})$

b) Montrer que D et Δ sont sécantes en un point G que l'on déterminera.

c) Ecrire une équation du plan Q contenant les deux droites D et Δ.

3°) Montrer que P et Q sont perpendiculaires et écrire les équations paramétriques de leur droite d'intersection :D'.

EXERCICE N°4

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On considère le plan P d'équation

$P : 2x+-y+z-1=0$ et la droite $D(A,\vec{u})$ avec $A(1,-1,2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Ecrire une équation du plan Q perpendiculaire à P et contenant la droite D.

EXERCICE N°5

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points

$A(2,-1,1)$; $B(1,-1,2)$ et $C(3,1,0)$.

1°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

2°) a) Montrer que le plan P passant par A, B et C a pour équation : $x+z-3=0$

b) Montrer que le plan P' médiateur de $[BC]$ a pour équation : $x+y-z-1=0$

c) Montrer que P et P' sont perpendiculaires.

3°) Calculer la distance du points O à chacun des plans P et P' puis déduire la distance de O à la droite Δ intersection de P et P'.

4°) a) trouver une représentation paramétrique de Δ

b) Trouver une équation cartésienne du plan Q passant par O et perpendiculaire à P et P'.

c) Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal de O sur Δ puis retrouver la distance de O à Δ.

EXERCICE N°6

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.On considère les deux plans :

$(P_1): x-4y+7=0$; $(P_2): x-2z+5=0$.

1°) Montrer que P_1 et P_2 sont sécants.

2°) Donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection :D.

EXERCICE N°7

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. le plan P a pour équation :

$P: x-2y+3z-1=0$, et la droite D a pour représentation paramétrique :

$$D:\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=-1+2t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}.$$

1°) Montrer que P et D sont sécants.

2°) Trouver les coordonnées du point d'intersection I du plan P et de la droite D.

EXERCICE N°8

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne le plan P de repère $\left(M_0,\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u''}\right)$ avec : $M_0\left(-3,1,4\right)$, $\overrightarrow{u'}\left(-1,2,3\right)$, $\overrightarrow{u''}\left(2,-2,1\right)$.

1°) Déterminer une équation cartésienne de P.

2°) Etudier l'intersection du plan P et de la droite D passant par le point $M_1\left(1,0,13\right)$ et vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\left(-2,\overset{1}{\cancel{4}},-5\right)$ et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

EXERCICE N°9

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1°) Ecrire une équation de la sphère de centre $\Omega\left(4,-1,8\right)$ et de rayon 9.

2°) Soit A et B les points de coordonnées respectives $\left(3,-5,7\right)$ *et* $\left(1,-3,9\right)$.

Ecrire une équation de la sphère S de diamètre $\left[AB\right]$

EXERCICE N°10

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Déterminer la nature des ensembles : E_1 ; E_2 et E_3 définie par :

1°) $E_1 = \{M(x,y,z) \text{ de l'espace tel que : } x^2+y^2+z^2-4x+2y+8z+12=0\}$

2°) $E_1 = \left\{M(x,y,z) \text{ de l'espace tel que : } x^2+y^2+z^2-3x+y-2z+\frac{7}{2}=0\right\}$

3°) $E_1 = \{M(x,y,z) \text{ de l'espace tel que : } x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+16=0\}$

EXERCICE N°11

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points $A\left(1,-2,0\right)$ et $B\left(-2,-1,1\right)$. Déterminer analytiquement l'ensemble S des points M du plan, tels que : $MA^2+MB^2=\frac{19}{2}$.

EXERCICE N°12

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan P d'équation : $x+y-z-1=0$ et la droite (Δ) : $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

1°) Montrer que (Δ) est contenue dans P.

2°) Ecrire une équation du plan Q perpendiculaire à P et contenant la droite (Δ).

3°) Soit S la sphère de centre $I(3,1,0)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$.

doue

9

a) Ecrire une équation cartésienne de S.

b) Montrer que S et P sont tangente et déterminer les coordonnées de leur point de contact E.

c) Montrer que S et Q sont sécants et caractériser $S \cap Q$.

4°) Déduire la distance de I à (Δ).

5°) On considère la famille des plans (P_m) : $x+y-z+m-2=0$; m étant un paramètre réel.

Etudier suivant le paramètre m la position de (P_m) et S.

EXERCICE N°13

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

8

On considère les plan (P_m) : $2x+2y-z+m=0$; où m un paramètre réel et les points

$A(3,-2,-1)$ $B(-1,2,-1)$.

1°) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de diamètre $[AB]$.

Déterminer son rayon R et les coordonnées de son centre I.

doue

2°) Déterminer les réel m pour lesquels (P_m) est tangent à S.

3°) Déterminer une équation cartésienne du plan (P') perpendiculaire à (P_m) contenant la droite (AB).

4°) Soit Q le plan parallèle à (P_m) et contenant le point C(0,0,1).

a) Déterminer une équation cartésienne de Q.

b) Donner la position relative de Q et S.

c) Caractériser $Q \cap S$.

Bon Travail