# SERIE D'EXERCICE SUITE

## EXERCICE N°1

On considère la suite $(u_n)$ définioe par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 - \sqrt{{u_n}^2 + 9} \end{cases}$

1) a- montrer que : $0 \leq u_n \leq 4$

   b-montrer que $(u_n)$ est croissante

   c-en déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

2) Soit $v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} u_k$ ; montrer que : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ .
3) Soit $w_n = 2\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} + n^2 v_n$
   a- Montrer que : $u_{k+1} \geq \frac{3-u_k}{2}$ pour tout $k \in \{0; 1; 2; \dots ; n\}$
   b- Déduire que : $w_n \geq 3n + 3$ puis calculer : $\lim_{n\to+\infty} w_n$

## *EXERCICE N°2*

*Soit* $(u_n)$ *la suite definie par :* $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots \frac{1}{2n-1}$ , $n \geq 1$

1) *Calculer* $u_1$ ; $u_2$ *et* $u_3$
2) *Montrer que pour tout* $n \geq 1$ *,* $u_n \geq \frac{1}{2}$
3) *Montrer que la suite* $(u_n)$ *est strictement decroissante et qu'elle est convergente.*
4) *On pose :* $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ *, Montrer que :* $\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{47}{60}$.

## *EXERCICE N°3*

1) *On considère la fonction* $f$ *définie sur* $]-\infty; 0[$ *par :* $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

   *a) dresser le tableau de variation de* $f$

   *b) en déduire que :* $f(x) \leq -2$ ; $\forall\, x \in\ ]-\infty\, ; 0[$

2) *Soit* $(u_n)$ *la suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   *a) montrer que ;* $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq -2$

   *b) montrer que* $(u_n)$ *est croissante*

   *c) en déduire que* $(u_n)$ *est convergente et déterminer sa limite*

3) *Soit* $(a_n)$ *et* $(b_n)$ *les suites définies sur* $\mathbb{N}$ *par :* $a_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} u_k$ *et* $b_n = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$

***a) par itération*** *montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a :* $u_{n+1} = b_n - a_n - 3$

b) En déduire que la suite $(b_n - a_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

*b) montrer que :* $a_n \leq -n - 1$ *.En déduire* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} b_n$

## EXERCICE N°4

*Pour tout* $n \geq 2$ *on pose* $f_n(x) = x^3 - 2nx + 1$.

1) *Montrer que* $f_n$ *est srictement décroissante sur*$[0;1]$.
2) *Montrer que l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une unique solution* $a_n$ *dans* $]0;1[$.
3) *a) vérifier que :* $\forall n \geq 2$ , $f_{n+1}(a_n) = -2a_n$.

   *b) montrer que la suite* $(a_n)$ *est décroissante.*

   *c)en déduire que* $(a_n)$ *est convergente.*

4) *a)montrer que* $\forall n \geq 2$ , $a_n \leq \frac{1}{n}$

   *b) en déduire* $\lim_{+\infty} a_n$

## EXERCICE N°5

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ ; $n \geq 1$

1) Calculer $u_2$ *et* $u_3$
2) Soit $(v_n)$ *et* $(w_n)$ les suites définies par : $v_n = u_{2n}$ *et* $w_n = u_{2n+1}$

a) *Montré* que $(v_n)$ est croissante et $(w_n)$ est décroissante.

b) *Montrer que* $v_n \leq w_n$ ; $\forall n \geq 1$

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty}(v_n - w_n)$. En déduire que $(v_n)$ et $(w_n)$ sont deux suites adjacentes.

3) *Montrer que la suite* $(u_n)$ converge vers un réel $\alpha$ et vérifier que : $\frac{3}{4} \leq \alpha \leq \frac{31}{36}$