Classe : 4 M	SERIE N° MATHEMATIQUES 2016/2017	Prof : **MOHAMED BENZINA**

Isométrie :

- Une isométrie φ conserve : les distances, les égalités vectorielles, le produit scalaire, le barycentre, le milieu, le parallélisme, le contact, l'orthogonalité…

- Une isométrie φ est une bijection et φ^{-1} est une isométrie.

- Si une isométrie φ fixe trois points nom alignés alors $\varphi = Id_P$.
  Si une isométrie φ fixe deux points A et B alors $\varphi = Id_P$ ou $\varphi = S_{(AB)}$.
  Si une isométrie φ fixe uniquement un point A alors φ est une rotation de centre A.

- Si deux isométries φ et ψ coïncident en trois points nom alignés alors $\varphi = \psi$.

- Toute isométrie du plan est une translation ou une rotation ou une symétrie orthogonale ou la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale.

- Si ABC et A'B'C' sont deux triangles isométriques alors il existe une unique isométrie φ tel que $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ et $\varphi(C) = C'$.

- Toute isométrie du plan est la composée d'au plus trois symétries orthogonales.

- Décomposition d'une translation : Pour tout vecteur nom nul $\vec{u}$, on a : $t_{\vec{u}} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ avec
  ($\vec{\Delta} \perp \vec{u}$, Δ choisie arbitrairement) et ($\Delta' = t_{\vec{u}/2}(\Delta)$).

- Décomposition d'une rotation : Pour tout réel θ et tout point A, on a : $R(A,\theta) = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$
  avec : (Δ passant par A, choisie arbitrairement) et (Δ' tq : $A \in \Delta'$ et $(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}}) \equiv \theta / 2\ [\Pi]$).

- Soit Δ et Δ' deux droites et l'isométrie $\varphi = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$. On a :
  * Si $\Delta = \Delta'$ alors $\varphi = Id_P$.
  * Si $\Delta // \Delta'$ alors $\varphi = t_{\vec{u}}$ avec : $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$, $A \in \Delta$ et $B = P_{\Delta'}(A)$.
  * Si $\Delta \cap \Delta' = \{A\}$ alors $\varphi = R(A,\theta)$ avec : $\theta \equiv 2(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}})\ [2\Pi]$.

- Définitions équivalentes d'un déplacement et d'un antidéplacement :

Déplacement :	Antidéplacement :
❖ Transforme un repère ON direct en un repère ON direct ❖ Est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales. ❖ Conserve les mesures des angles orientés.	❖ Transforme un repère ON direct en un repère ON indirect. ❖ Est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales. ❖ Change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

- La composée de deux déplacements est un déplacement.
  La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
  La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
- Si φ est un déplacement alors φ^{-1} est un déplacement.
  Si φ est un antidéplacement alors φ^{-1} est un antidéplacement.

Déplacement :

- <u>Angle d'un déplacement</u> : Soit A et B d'image respective A' et B' par un déplacement φ alors l'angle de φ est : $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})\ [2\pi]$.

- Soit φ et ψ deux déplacements d'angle respectif θ et α alors on a :
  $\varphi \circ \psi$ est un déplacement d'angle $\theta + \alpha$.
  φ^{-1} est un déplacement d'angle $-\theta$.

- Soit φ un déplacement, on a $\varphi = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$

Position de Δ et Δ' :	Angle :	Points Invariants :	Nature de φ :
$\Delta = \Delta'$	$2k\Pi / k \in Z$	P	Id_P
$\Delta \,//\, \Delta'$	$2k\Pi / k \in Z$	$\varnothing$	Translation
$\Delta \cap \Delta' = \{I\}$	$\theta \neq 2k\Pi$	{I}	Rotation d'angle θ

- Si un déplacement φ admet deux points invariants alors $\varphi = Id_P$.

- Deux déplacements qui coïncident en deux points sont égaux.

- Les déplacements du plan sont : L'Id_P, les translations ou les rotations.

- Si $AB = CD$ ($A \neq B$) alors il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A) = C$ et $\varphi(B) = D$.

- <u>Décomposition des déplacements</u> :
  * $t_{\vec{u}} \circ R(O,\theta) = R(O',\theta)$. En général non commutative.
  * $R(O,\theta) \circ R(O',\theta') = \begin{cases} R(O'',\theta+\theta') & \text{si } \theta+\theta' \neq 2k\Pi\ (k \in Z). \\ t_{\vec{u}} & \text{si } \theta+\theta' \equiv 0\ [2\Pi] \end{cases}$
  * $S_{O'} \circ S_O = t_{2\overrightarrow{OO'}}$.

- Toute symétrie centrale S_O se décompose en deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires en O.

Antidéplacement :

- Un antidéplacement qui admet un point invariant est une symétrie orthogonale d'axe passant par ce point.
- Si $AB = CD$ ($A \neq B$) alors il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(A) = C$ et $\varphi(B) = D$.

- Une isométrie φ est un antidéplacement sssi φ est la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale.

- Soit un antidéplacement $\varphi = t_{\vec{v}} \circ S_D$, on a :

  * Si $\vec{v} \perp \vec{D}$ alors $\varphi = S_{D'}$ avec la droite $D' = t_{\vec{v}/2}(D)$.

  * Sinon alors φ n'a pas de points fixes et φ peut s'écrire sous la forme réduite :

  $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ directeur de Δ. (cette composée est appelée symétrie glissante).

- Soit φ une symétrie glissante d'axe Δ, on a : $\varphi(M) = M' \Rightarrow M * M' \in \Delta$.

- Soit φ une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ alors $\varphi \circ \varphi = t_{2\vec{u}}$.

  Donc si $\varphi \circ \varphi(M) = M'$ alors $2\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

EXERCICE 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. On appelle g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=i\bar{z}+1+i$.

1) **Montrer que g est une isométrie.**
2) **a) Montrer que g n'admet pas des points fixes.**
   b) En déduire que g est une symétrie glissante.
3) **On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=1$, $z_B=1+i$, $z_C=1+2i$ et $z_D=2+2i$**
   a) Déterminer $g(A)$ et $(g\circ g)(O)$.
   b) Caractériser alors g.

EXERCICE 2 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$

E = C * D, F = C * B et I le point du plan tel que CIA soit un triangle équilatéral direct

1) a)Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI}}\right)\equiv\frac{\pi}{12}(2\pi)$

b)Montrer que : $r_{\left(A,\ \frac{\pi}{6}\right)} = S_{(AI)} o\, S_{(AD)}$

c)Déterminer la droite Δ telle que $r_{\left(I,\ \frac{\pi}{3}\right)} = S_{\Delta}\ o\ S_{(IA)}$

d) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h = r_{\left(I,\ \frac{\pi}{3}\right)} o\, r_{\left(A,\ \frac{\pi}{6}\right)}$

2)a)Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(C) = B et f(E) = F

b)Montrer que f est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c)Montrer que f(D) = C

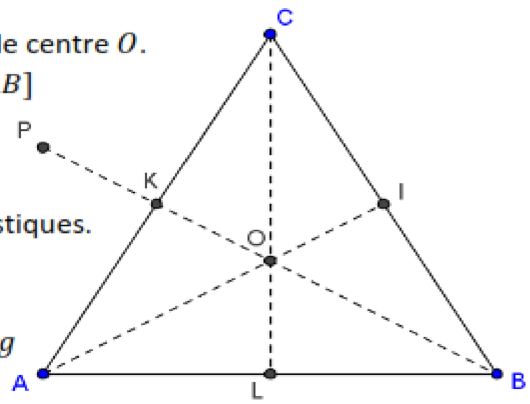
3) Soit g le antidéplacement tel que g(D) = C et g(C) = B

a) Montrer que g est une symétrie glissante.

b) On désigne par Δ et $\vec{u}$ l'axe et le vecteur de g.

Montrer que $g\ o\ g = t_{2\vec{u}}$ et déterminer $\vec{u}$ et Δ

EXERCICE 3 :



Dans la figure ci-contre ABC est un triangle équilatéral direct de centre O.
I , K et L les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$
les points O et P sont symétriques par rapport à (AC)

1) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(B)=A$ et $f(A)=C$ et donner ses éléments caractéristiques.
2) On pose $g=S_{(AC)}\circ f$
   a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g
3) On pose $O'=T_{\overrightarrow{IC}}(O)$, montrer que $O'=S_{(KL)}(P)$
4) Soit $h=f\circ T_{\overrightarrow{CI}}$. Déterminer $h(K)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de h
5) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$
   a) Montrer que $R=S_{(OB)}\circ\ g$
   b) En déduire que $S_{(OB)}\circ R=S_{(AC)}\circ f$ puis caractériser $f\circ R^{-1}$
6) Soit D le symétrique de C par rapport à (AP)
   a) Montrer que $g(C)=D$
   b) En déduire que $(AC)=med[BD]$