Télécharger solution des exercices

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\mathcal{C}$ la conique de foyer $F(1,-1)$ de directrice $D : x = 5$ et d'excentricité $e = \dfrac{1}{3}$

1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ (*ellipse, hyperbole, parabole*), l'axe focal, les coordonnées des sommets principaux A et A', secondaires B et B', du centre Ω , du second foyer F' et la seconde directrice D'.

2. Préciser l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les coordonnées des points d'intersection avec les axes.

Exercice 2

Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$. Pour tout $t \notin \{a, b\}$ on considère la courbe $\mathcal{C}_t$ d'équation :

$$\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} = 1.$$

1. Quelle est la nature de $\mathcal{C}_t$? Montrer que si $\mathcal{C}_t$ est une conique, ces foyers ne dépendent pas de t.

2. Montrer que si $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{C}_u$, pour $t \neq u$, se coupent en M , alors elles sont orthogonales (*i.e. les tangentes en* M *à* $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{C}_u$ *sont orthogonales*).

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$, on considère l'ensemble $\mathcal{C}_\alpha$ des points M de coordonées (x, y) telles que $x^2 + y^2 + 2\alpha xy - 1 = 0$

1. Discuter en fonction de α du genre de la conique.

2. Préciser l'ensembe $\mathcal{C}_0$.

3. Préciser les ensemble $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$.

4. On considère le repère $\mathcal{R}_\theta = (O, \vec{u}, \vec{v})$ obtenu par rotation d'angle θ de $\mathcal{R}$, on note (X, Y) les coordonnées de M dans ce repère. Comment choisir $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour que le terme en XY de l'équation $\mathcal{C}_\alpha$ dans ce repère soit nul ? Quel est alors l'équation de $\mathcal{C}_\alpha$.

5. En déduire les paramètres a, b, c et e lorsque $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = 2$.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit M un point d'affixe $z = x + iy$, M_1 d'affixe z^2 et M_2 d'affixe z^5.

On considère l'ensemble $\mathcal{H}$ ={M du plan tels que M, M_1 et M_2 sont alignés}.

Déterminer et construire $\mathcal{H}$.

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, donner l'équation de la parabole de foyer $F(\dfrac{1}{2}, 2)$ et de directrice la droite $D : x = 3$.

Exercice 6

Soit le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$. (*unité graphique 3 cm*)

1. Soit $(\mathcal{H})$ l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant : $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$

Montrer que $(\mathcal{H})$ est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et une asymptote.

2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe $z = x + iy$ tels que les points A, M et M' d'affixe 1, z et z^4 soient alignés.(*On pourra poser* $Z = 1 + z + z^2 + z^3$ *et exprimer le complexe* Z *en fonction de* x *et* y).

3. Construire l'ensemble Γ .

Exercice 7

Démontrer que $F = \{M(z)/\dfrac{z-i}{\overline{z}+4+i} \in i\mathbb{R}\}$ est inclus dans une conique que l'on tracera et dont on donnera tous les éléments caractéristiques.

Exercice 8

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *d'unité graphique 2 cm*, on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que : $|z-1-i| = \dfrac{1}{4}|z+i\overline{z}-8(1+i)|$.

1. Soit p l'application du plan dans lui-même , qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$z' = \dfrac{1}{2}|z-i\overline{z}+8(1+i)|$

On pourra poser $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

(*a*) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $p(M) = M$

(*b*) Montrer que, pour tout point M, les coordonnées du point M' vérifient l'équation : $x'+y'-8 = 0$. On appellera $(\mathcal{D})$ la droite d´ecrite par les points M'.

(*c*) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite $(\mathcal{D})$. caractériser géométriquement l'application p.

2. On se propose de déterminer l'ensemble défini au début de l'exercice.

(*a*) Montrer que $z-z' = \dfrac{1}{2}|z+i\overline{z}-8(1+i)|$.

(*b*) en déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ est une ellipse de foyer F d'affixe $1+i$, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité $\dfrac{1}{2}$.Préciser l'axe focal.

(*c*) Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $2+2i$ et $-2-2i$ sont deux sommets de $\mathcal{E}$.

3. **Allure de l'ensemble $\mathcal{E}$**

(*a*) Construire dans le repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la droite $(\mathcal{D})$, l'axe focal, les points A, A' et F.

(*b*) D´eterminer géométriquement les deux autres sommets de l'ellipse.

(*c*) Donner l'allure de $\mathcal{E}$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$.

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer I_1, en déduire la valeur de I_3.

Exercice 10

Soit les deux intégrales :

$$I = \int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx \quad \text{et } J = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin^2 x dx$$

1. On pose $K = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2 e^{(1+i)x} dx$, vérifier que $I = \Re e(K)$ (on a posé $\cos x = \Re e(e^{ix})$).

2. Avec deux intégration par parties montrer que $I = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1-\pi^2}{2}e^{\pi}$.

3. Calculer J.

Exercice 11

Soit f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1, 1]$, dont la dérivée est continue sur cet intervalle. Montrer que :

$$\text{Si } f(-1) = -f(1), \text{ alors } \int_{-1}^{1} xf'(x)dx = -\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

Exercice 12
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^4 x - \cos^2 x$.
1.
(a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
(b) En déduire que $f''(x) + 16f(x)$ est constant.
2. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Exercice 13
On définit la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
2. En déduire un encadrement de J_n, pour tout entier $n \geq 1$, puis la limite de la suite (J_n).
3. En étudiant le signe de $J_{n+1} - J_n$, démontrer que la suite (J_n) est décroissante.
4. Etablir que, pour tout entier $n \geq 1$, $J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
5. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier $n \geq 3$,

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

Déterminer alors la limite de nJ_n.
6. Calculer J_1, puis en utilisant la question *4*, déterminer J_3 et J_5.

Exercice 14
Soit la fonction f définie sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.
1. Etudier la fonction f . Préciser son (ses) asymptote(s).
Soit A le point de la courbe de f d'abscisse 0 et B le point de la courbe de f d'abscisse $\frac{1}{2}$.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ au point A.
3. Déterminer une équation de la droite (AB). Préciser la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite (AB).
4. Soit $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.
(a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $1 \leq f(x) \leq 2\sqrt{e}$.
(b) En déduire que $1 \leq I \leq \sqrt{e}$.
5.
(a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$.
(b) En déduire que $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\, e^x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$.
(c) Déduire de *4.*(b) un encadrement de $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$ puis un encadrement de I.