Med Migha
97090496

Exercice 1

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. a. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$: $u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout $n \geqslant 4$: $u_n \geqslant n-2$.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On définit la suite (v_n) par : $v_n = 4u_n - 8n + 24$
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n :
   $$u_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6.$$
   c. Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
   d. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Exercice 2

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :
   $w_n = v_n - u_n$.
   a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n)
3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on déduire ?

Exercice 3

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. a. Etablir que la suite (u_n) est décroissante.
   b. Etablir que la suite (v_n) est croissante.
2. a. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
   b. Que peut-on dire de la convergence de ces deux suites ?

Exercice 4

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la focntion définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
   $$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(x + \frac{7}{x}\right) \qquad (*)$$
   Démontrer que la fonction f admet un minimum.
   En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant \sqrt{7}$
2. a. Soit n un entier naturel quelconque. Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?
   c. On déduit de la relation $(*)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que : $\ell = \frac{1}{2}\cdot\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.
   Déterminer ℓ.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$$
4. On définit la suite (d_n) par :
   $$d_0 = 1 \quad ; \quad d_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot{d_n}^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
   $$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n$$