Exercice 1:

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB direct et rectangle en O.
On désigne par J le milieu de [AB].
M est un point variable de la droite (Δ) perpendiculaire en A à (AB).
La perpendiculaire en O à (OM) coupe (AB) en M'.

1:Soit s la similitude de centre O telle que s(A)=B.
a)Montrer que, pour tout point M de (Δ), s(M)=M'.
b)En déduire que, lorsque M décrit (Δ), le triangle OMM' reste semblable à un triangle fixe que l'on précisera.

2: a)Montrer que , pour tout point M de (Δ), le point I milieu de [MM'] est l'image de M par une similitude S de centre O dont on précisera le rapport et l'angle.
b)Soit H le projeté orthogonal de O sur (Δ).Déterminer S(H).
c)Déterminer le lieu géométrique du point I lorsque M décrit (Δ).

3: Pour tout point M de (Δ) distinct de A, on désigne par P le point tel que MAM'P est un rectangle.
Déterminer le lieu géometrique du point P lorsque M décrit "(Δ) - {A}".

Exercice 2:

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par T l'application de P dans P qui, à tout point d'affixe Z, associe
le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z - i$.
1: Montrer que T est une similitude directe de P don't on donnera les élèments caractéristiques
On notera A le point invariant de T.
Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'})$, en supposant que M ≠ A.

2: a) Construire M' pour un point M donné.
b) Déterminer l'image de D' par T de la droite D d'équation $y = x$.
Construire D'.

3: a) Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les

affixes z_0 de B et z'_0 de B' = T(B) soient liées par la relation $z_0z'_0=1$.
Mettre en place B et B'.

b) Soit A' le symétrique de A par rapport à O.
Montrer que les points A, A' , B et B' sont cocycliques.

Exercice 3:

Dans le plan orienté , une unité étant choise, on considère un rectangle ABCD tel que

$$AB = \sqrt{2} \quad , \quad AD = 1 \quad , \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \text{ est un angle droit direct}$$

.

I désigne le milieu de [AB].

Partie A:

Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que MD² - MB² =1.

1: Vérifier que les points C et I appartiennent à (E).

2: a) Déterminer et construire (E).

b) En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

Partie B:

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct

$$(A\ ; \vec{u}\ ; \vec{v}) \text{ avec } \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{AD}$$

Soit S une similitude directe qui, au point M d'affize z , associe le point M' d'affixe z' telle que:

$z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec a non nul.

1: Déterminer les nombres complexes a et b pour que S(D) =C et S(C) = B.

2: Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que:

$$z' = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$$

Déterminer le rapport et l'angle de T.

3: Montrer que la similitude T transforme B en I.

4: En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).

5: Montrer que le centre W de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

CORRECTION1

1. a:
(OA) et (OB) sont orthogonales avec (OA,OB)=Pi/2
donc s est la simiiltude de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{OB}{OA}$.

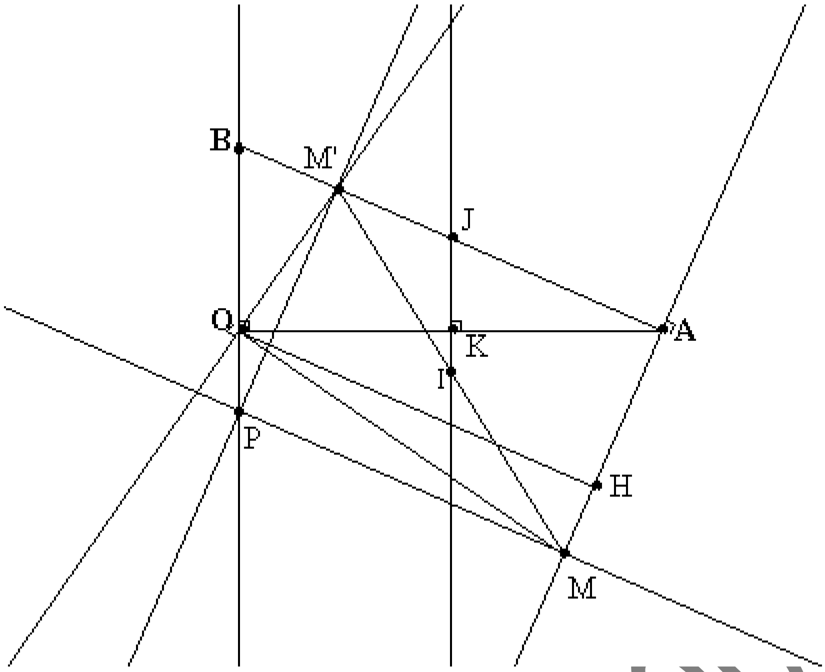
Posons N = s(M)
Donc (OM) et (ON) sont aussi perpendiculaires. Donc, M' est sur (ON) et N est sur la droite (OM')

De plus, les droites (AM) et (BN) sont orthogonales (car l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$) donc N est sur (AB)
N est donc sur (AB) et sur la droite perpendiculaire à (OM) , donc N = M' et on a bien s(M) = M' .

b:
Le triangle OMM'' est rectangle en O. De plus, les rapports $\frac{OB}{OA}$ et $\frac{OM'}{OM}$ sont égaux. (C'est simplement le rapport de la similitude s).
Donc les triangles OMM' et OAB sont semblables.

2. a:
OMM' et OAB sont semblables. J=milieu de [AB] et I=milieu de [MM']
Donc les triangles OMI et OAJ sont semblables.
Si S est la similitude de centre O telle que S(A) = J alors S(M) = I.
L'angle de S est $\widehat{AOJ}$ et son rapport est $\frac{OJ}{OA}$
b:
En particulier, si M=projeté orthogonal de O sur (Δ) , alors le quadrilatère OMAM' est un rectangle.
Le milieu de [MM'] est alors égal au milieu de [OA].
Donc, dans ce cas, l'image de M par S est le milieu de [OA].
c:
Si M décrit Δ alors S(M) décrit une droite! (image par une similitude d'une droite = une droite!)
Or, S(A)=J et S(H) = milieu de [OA]
donc la droite décrite par S(M) est la droite (JK) , où K = milieu de [OA]
c.a.d , médiatrice de [OA]

3. Il suffit de voir que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AI}$
Posons t = homothétie de centre A et de rapport 2. Alors P = toS(M) , où S est la similitude de la question 2.
toS est aussi une similitude. L'image de Δ par toS est une droite.
Or : toS(A)=B et toS(H) =O
donc l'image de Δ est la droite (OB)
Donc, si M décrit Δ-{A} alors P décrit la droite (OB)-{B}



Correction2

1: L'application T est la similitude directe de rapport: $|1+i|=\sqrt{2}$

d'angle $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ et de centre le point A d'affixe z_1 solution de l'équation $z = (1 + i)z - i$. C'est donc le point d'affixe $z_1 = 1$.

Si M est un point du plan distinct de A, d'affixe z, et si M' = T(M) est d'affixe z', on a:

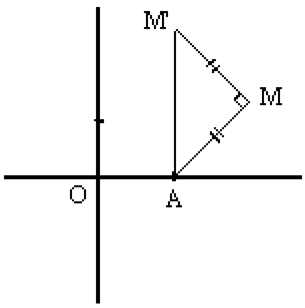
$z' = (1 + i)z - i$ d'où $z' - z = i(z - 1)$ ou encore : $\frac{z'-z}{z-1}=i$.

On en déduit qu'un argument de ce nombre complexe est:

$$\arg\left(\frac{z'-z}{z-1}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Donc une mesure de l'angle demandé est $\frac{\pi}{2}$

2: a) On peut voir que la relation z'-z=i(z-i) implique aussi que le triangle AMM' est rectangle en M isocèle et direct.



D'où le construction de M' à partir de M.

b) L'image de D par T est une droite D'.

Comme O et C d'affize 1 + i sont sur D, il suffit de connaitre les images de O et C par T pour connaitre D'.

Or, T(O) a pour affixe -i et T(C) a pour affixe i (simple calcul)

On en déduit que D' = T(D) est la droite des ordonnées.

3: a) Il est demandé de déterminer l'ensemble des points M tels que zz' = 1.
Ceci conduit à l'équation, en reprenant la défintion liant z' à z:
$z[(1 + i)z - i] = 1$ ou encore $z^2(1 + i) - iz - 1 = 0$ ou encore $(z - 1)[z(1 + i) + 1] = 0$.
Le point cherché B doit être distinct de A donc son affixe est distincte de 1.
On a donc: $z(1 + i) + 1 = 0$ ce qui donne :

$$z = \frac{-1}{1+i} = \frac{i-1}{2}.$$

D'où l'existence et l'unicité du point B.
Le point B a donc pour affixe $\frac{i-1}{2}$ et B' = T(B) pour affixe $-(1 + i)$.

b) C'est un application de la question 2:
Le triangle ABB' est rectangle en B.
Comme A' a pour cordonnées (-1 ; 0), on remarque que AA'B' est rectangle en A'.
Les points A, A' , B et B' sont donc sur le cercle de diamètre [AB'].

Correction3

Partie A:

1: On remarque que $AB = CD = 2^{1/2}$ et $AD = BC = 1$.
Donc , $CD^2 - CB^2 = 2 - 1 = 1$: C appartient bien à (E)
De même, I étant le milieu de [AB] , on a:
$AI = BI = (2^{1/2})/2$ et $DI^2 = AD^2 + AI^2 = 1 + 1/4 = 5/4$
donc: $DI^2 - BI^2 = 5/4 - 1/4 = 1$
I appartient aussi à (E).

2: a)

où G est le milieu de [BD]
La relation $MD^2 - MB^2 = 1$ s'écrit alors:

L'ensemble (E) est donc un droite perpendiculiare à (BD).
Comme C et I sont dans (E), cette droite est la droite (CI).

b) Voir au-dessus

Partie B:

Les coordonnées des points sont:
A(0 ;0) , B($2^{1/2}$; 0) , D(0 ; 1) C($2^{1/2}$; 1)

1: D a pour affixe i , C pour affixe $2^{1/2} + i$, et B pour affixe $2^{1/2}$.
On veut donc: $\{2^{1/2} + i = ai + b$ et $2^{1/2} = a(2^{1/2} + i) + b\}$

D'où :

2: On remarque que T = S.

L'expression "complexe" de T montre que son rapport est et que son angle est $-\pi/2$

3: I étant le milieu de [AB], l'affixe de I est :

Il suffit alors de vérifier que l'expression complexe de T montre bien que T(B) = I.

Simple calcul!

4: On a : S(D) = C et S(B) = I

L'image d'une droite par une similitude est une droite, donc l'image par T de la droite

(BD) est la droite (CI) . Comme l'angle de T est $-\pi/2$, on en déduit que ces deux droites

sont bien perpendiculaires.

5: A faire sans calcul.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soient les points A, A′, B et B′ d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - 2i, \quad z_{A'} = -2 + 4i, \quad z_B = 3 - i, \quad z_{B'} = 5i.$$

▶ **1. a)** Placer les points A, A′, B et B′ dans le plan complexe. Montrer que ABB′A′ est un rectangle.
b) Soit s la réflexion telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.
On note Δ son axe.
Donner une équation de la droite Δ et la tracer dans le plan complexe.

c) On note z' l'affixe du point M′ image par s du point M d'affixe z.
Montrer que :

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + 2i - 1.$$

▶ **2.** Soit g l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\bar{z} + 5 - i.$$

a) On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.
b) Soit Ω le point d'affixe $1 + i$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
Montrer que C et D sont les images respectives de A′ et B′ par h.

c) Soit M_1, d'affixe z_1, l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

▶ **3.** On pose $f = h^{-1} \circ g$.
a) Déterminer l'expression complexe de f.
b) Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

Courrige 4