Exercice 1 :

Soit A et I deux points du plan et soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Construire les points O=R(A) et B=R(O) puis montrer que IBOA est un losange.
2) Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon OI . Soit $M\in(\Gamma)$ et M'=R(M).
   a) Montrer que lorsque M décrit le cercle (Γ) , le point M' décrit un cercle (Γ') qu'on précisera.
   b) Soit Ω le deuxième point d'intersection des cercles (Γ) et (Γ').
   Montrer que si $M\neq I$, les points M, Ω et M' sont alignés .
3) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A)=O et f(O)=B.
   b) Montrer que f est une symétrie glissante . Préciser son axe et son vecteur.
   c) Vérifier que $f = S_{(OB)} \circ R$ où S(OB) est la symétrie orthogonale d'axe (OB).
   d) Déterminer l'ensemble des points N du plan tels que R(N)=f(N).
4) Soit C et D les symétriques respectifs de I par rapport à O et B .
   On désigne par S la similitude directe définie par S(A)=C et S(O)=D et on pose $h = S\circ R^{-1}$.
   a) Déterminer h(O) et h(B).
   b) En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   c) Déterminer alors les éléments caractéristiques de la similitude S.
5) Soit g la similitude indirecte telle que g(C)=O et g(D)=B.
   a) Déterminer le rapport de g . En déduire que g admet un seul point invariant qu'on notera J.
   b) On désigne par (Δ) l'axe de la similitude g et par E le point d'intersection des droite (Δ) et (OC).
   Soit E' l'image de E par g. Montrer que $\overrightarrow{JE} = 2\overrightarrow{JE'}$
   c) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{JE}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{JE}}\right)[2\pi]$. En déduire que les droites (Δ) et (CD) sont parallèles.
   d) Soit C' le symétrique du point C par rapport à la droite (Δ) .
   Montrer que E est le centre de gravité du triangle JCC'. En déduire que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EO}$
   e) Déduire un procédé de construction du point E puis l'axe (Δ) et le centre J de la similitude g .

Exercice 2 :

On considère dans le plan orienté, un triangle ABC équilatéral de sens direct .
On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC] et par D le symétrique de A par rapport à C

1- Soit f l'antidéplacement de P tel que f(C)=A et f(A)=B.
   Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur
2- Soit g la similitude directe telle que g(B)= D et g(I)=C.
   Montrer que g(A)=A et déterminer les éléments caractéristiques de g
3- Soit Ω le point définie par $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I} = \vec{0}$
   a- Justifier que fog est une similitude indirecte
   b- Déterminer fog(I) et fog(A)
   c- Vérifier que $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$. En déduire fog(Ω)= Ω
4- a- Déterminer le rapport de la similitude fog
   b- Montrer que l'axe de la similitude fog est perpendiculaire à la droite (AB) en Ω.

Exercice 3 :

On considère dans le plan orienté, un triangle ABC tel que AC=2AB et qu'une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ soit comprise entre 0 et π. Les cercles (Γ_1) et (Γ_2) passant par A et de centre respectifs B et C se recoupent en E. On désigne par S_A la similitude directe de centre A transformant (Γ_1) en (Γ_2).

1) a) Soit M un point de (Γ_1) et M' son image par S_A. Justifier la relation : $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM'}}\right)[2\pi]$
   b) Démontrer que les points M, E et M' sont alignés
2) On désigne par σ_A la similitude indirecte de centre A qui transforme (Γ_1) en (Γ_2).
   a) Donner le rapport de σ_A et montrer que σ_A a pour axe la médiatrice du segment [BK] où K est le milieu du segment [AC]
   b) Soit l'application $f = \sigma_A \circ S_A^{-1}$. Déterminer la nature de f et la caractériser
   c) En déduire que les images par S_A et σ_A de tout point M sont symétriques par rapport à (AC)

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. La bissectrice intérieure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$ coupe [AC] en O. On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et H' le milieu de [OA]

1) Faire une figure et montrer que le triangle OAB est isocèle et H le milieu de [AB].
2) Soit f la similitude directe telle que f(B)=O et f(H)=H'.
   a) Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ une mesure de son angle.
   b) Montrer que H' est le milieu de [Of(A)]. En déduire que A est le centre de f.
3) Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs [AB] et [AO] se coupe en D .
   a) Montrer que les points O, B et D sont alignés.
   b) Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que f(C)=D.
   c) Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.
4) a) Soit $g = S_{(DH)} \circ f$ où $S_{(DH)}$ la symétrie axiale d'axe (DH). Déterminer g(A) et g(C).
   b) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport .
   c) Soit Ω le centre de g . Montrer que $\overrightarrow{\Omega A} = 3\overrightarrow{\Omega D}$ puis construire le centre Ω et l'axe Δ de g.

Exercice 5 :

Soit dans le plan orienté un triangle ABC tel que : AC=2AB et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

$\mathscr{C}_1$ est le cercle passant par A et B et tangent à (AC) en A, $\mathscr{C}_2$ est le cercle passant par A et C et tangent à (AB) en A. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en A et O. M∈[AB], N∈[AC] et AN=2BM, I est le milieu de [MN]

1/ S est la similitude directe qui transforme B en A et A en C.
   a) Déterminer le rapport et un angle de S.
   b) Montrer que O est le centre de S. En déduire que $S(\mathscr{C}_1)=\mathscr{C}_2$.
2/a) Montrer que OAB est un triangle rectangle en B.
   b) En déduire que OAC est un triangle rectangle en A.
3/ a) Montrer que S(M)=N
   b) Déterminer l'ensemble des points I lorsque M décrit [AB].
4/ S' est la similitude indirecte tel que S'(B)=A et S'(A)=C.
   a) Déterminer le rapport de S'.
   b) O' est le centre de S'. Caractériser S'oS'.
   c) En déduire que $\overrightarrow{O'C} = 4\overrightarrow{O'B}$ .Puis construire O'. Δ est l'axe de S' ; construire Δ
   d) Δ coupe (AB) en G et (AC) en H. Montrer que G est le milieu de [O'H]. En déduire que S(G)=H.

Exercice 6 :

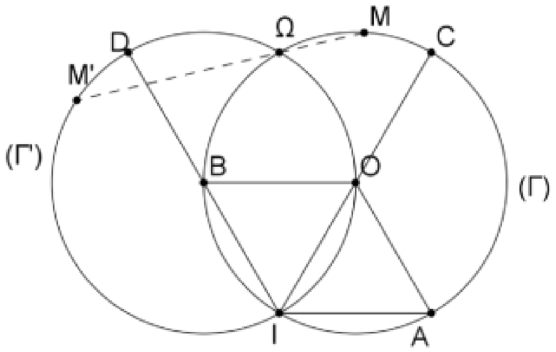
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre I et A un point de $\mathscr{C}$. Soient B le point image de A par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et O le milieu du segment [AB] ; la demi droite [OI) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en D.

1) Soit S la similitude directe de centre A qui transforme I en O.
   Déterminer le rapport k et l'angle α de S.
2) Soit K le pied de la hauteur issue de A à [DB].
   a) Montrer que le triangle ADK est rectangle isocèle en K.
   b) En déduire que S(D) = K.
   c) Soit J le milieu [AD]. Montrer que I, J et K sont alignés.
3) a) Soit E le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathscr{C}$. Montrer que S(E) = B.
   b) Soit F le point tel que ABEF est un carré de sens direct. Montrer que S(F) = I.
   c) Montrer que les droites (ID) et (EF) sont perpendiculaires et en déduire que (OK) est la médiatrice de [IB] (**On pourra déterminer S((ID)) et S((EF))**)
   d) Soit L le symétrique de I par rapport à O. Montrer que l'image du carré ABEF par S est le carré ALBI
4) Soit σ la similitude indirecte qui transforme J en K et K en A.
   a) Déterminer le rapport k' de σ .
   b) Soit w le centre de la similitude indirecte σ . Caractériser $\sigma \circ \sigma$.
   Déterminer $\sigma \circ \sigma(J)$ et déduire que w = D.
   c) Déterminer l'axe de σ et montrer que $\sigma(I)$ = H où H est l'orthocentre du triangle ABD.
   d) Soit A' = σ(A). Montrer que K est le milieu [A'D] .
5) a) Soit g = $\sigma \circ$ S. Déterminer g(D) et g(A) puis donner la nature de g.
   b) La droite (OJ) coupe (AA') en J'. Déterminer la forme réduite de g .

Correction de la série

Exercice 1 :

1)



$O = R(A) \Leftrightarrow \begin{cases} IO = IA \\ (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IO}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow$ IOA est équilatéral

$B = R(O) \Leftrightarrow \begin{cases} IB = IO \\ (\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow$ IBO est équilatéral

$\Rightarrow$ IA=AO=OB=BI $\Rightarrow$ IAOB est un losange

2) a) $M \in (\Gamma) \Rightarrow R(M) \in R(\Gamma) \Rightarrow M' \in R(\Gamma)$
(Γ) le cercle de centre O et de rayon OI
$(\Gamma') = R(\Gamma)$ est le cercle de centre R(O)=B et de même rayon .

2)b)

$M' = R(M) \Rightarrow IMM'$ est équilatéral direct

$\Rightarrow (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MI}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Les points I et Ω appartiennent au cercle (Γ)

$M \in \Gamma \Leftrightarrow M \in \widehat{\Omega I}$ ou $M \in \widehat{I\Omega}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MI}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MI}) \equiv \frac{\pi}{3} + \pi[2\pi]$

Si $M \in \widehat{\Omega I}$

$(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M\Omega}) \equiv (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MI}) + (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{M\Omega})[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right)[2\pi] \equiv 0[2\pi]$

Si $M \in \widehat{I\Omega}$

$(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M\Omega}) \equiv (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MI}) + (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{M\Omega})[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \pi[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M\Omega}) \equiv 0[\pi]$

$\Rightarrow$ les points M, M' et Ω sont alignés

3)a) Montrons que AO=OB ≠0
IAOB est un losange $\Rightarrow$ AO=OB ≠0
$\Rightarrow$existe un unique antidéplacement f tel que f(A)=O et f(O)=B.

3) b) f est un antidéplacement alors f est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante .
Or f(A)=O et f (O)=B $\Rightarrow$ fof(A)=B≠A.
Alors f est une symétrie glissante .

Soit (Δ) son axe et $\vec{u}$ son vecteur.

fof(A)=B $\Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

L'axe Δ est la droite joignant les milieux des segments [AO] et [OB].

3) c)

$S_{(OB)} \circ R(A) = S_{(OB)}(O) = O$

$S_{(OB)} \circ R(O) = S_{(OB)}(B) = B$

$S_{(OB)} \circ R$ est la composée d'un antidéplacement et un déplacement donc $S_{(OB)} \circ R$ est un antidéplacement .

$S_{(OB)} \circ R$ et f sont deux antidéplacements qui coïncident sur deux point distincts A et O,

donc $f = S_{(OB)} \circ R$

3)d)

$R(N) = f(N) \Leftrightarrow R(N) = S_{(OB)} \circ R(N)$,car $f = S_{(OB)} \circ R$

$\Leftrightarrow R \circ R^{-1}(N) = S_{(OB)} \circ R \circ R^{-1}(N)$

$\Leftrightarrow N = S_{(OB)}(N)$

$\Leftrightarrow N \in (OB)$

l'ensemble cherché des points N du plan tels que R(N)=f(N) est la droite (OB).

4)a) O le milieu de [IC] et B le milieu de [ID]
S la similitude directe tq S(A)=C et S(O)=D

$h(O) = S \circ R^{-1}(O) = S(A) = C$,car $R^{-1} = R_{\left(I, -\frac{\pi}{3}\right)}$

$h(B) = S \circ R^{-1}(B) = S(O) = D$

4) b) On a h(O)=C et h(B)=D. ①

$\left.\begin{array}{l} \text{Dans le triangle IDC on a} \\ \text{O le milieu de } [IC] \\ \text{B le milieu de } [ID] \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{OB}$ ②

En appliquant la propriété caractéristique d'une homothétie
① et ② $\Rightarrow$ h est une homothétie de rapport 2.
Soit w le centre de h,

$h(O) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{WC} = 2\overrightarrow{WO} \Leftrightarrow W = I$

Conclusion : h est l'homothétie de centre I et de rapport 2 .

Autrement :

$h = S \circ R^{-1}$, $h(O) = C$ et $h(B) = D$

h est la composée de deux similitudes directes donc h est une similitude directe de rapport

$\frac{CD}{OB} = 2$ et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{CD}}) \equiv 0[2\pi]$ d'après ❷

$\Rightarrow$ h est une homothétie de rapport 2.

4) c)

$h = S \circ R^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad h_{(I,2)} \circ R_{\left(I,-\frac{\pi}{3}\right)} = S$

$\Rightarrow$ S est la similitude directe de centre I ,

de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

5)a) g la similitude indirecte telle que :

g(C)=O et g(D)=B

le rapport de g est $\frac{OB}{CD} = \frac{1}{2}$

le rapport de g est $\neq 1 \Longrightarrow$ g admet un seul point invariant J.

b) (Δ) l'axe de la similitude indirecte g

$\Rightarrow g = h_{\left(J,\frac{1}{2}\right)} \circ S_{\Delta}$ (Forme réduite de g)

$g(E) = E' \Leftrightarrow h_{\left(J,\frac{1}{2}\right)} \circ S_{\Delta}(E) = E'$

$\Leftrightarrow h_{\left(J,\frac{1}{2}\right)}(E) = E'$ car $E \in \Delta$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JE'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JE}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JE} = 2\overrightarrow{JE'}$

5) c) On a g(C)=O, g(D)=B, g(J)=J et g(E)=E'

Et on sait qu'une similitude indirecte change les mesures des angles orientés en leurs opposées donc

$(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{JE}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{JE'}})[2\pi]$

$\equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{JE}})[2\pi]$ car $\overrightarrow{JE} = 2\overrightarrow{JE'}$

$(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{JE}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{JE}})[2\pi]$

$\equiv -(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{JE}})[2\pi]$ car $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{JE}}) \equiv 0[2\pi]$

Or J∈Δ et E∈Δ $\Longrightarrow \overrightarrow{JE}$ est directeur de Δ

Alors les droites (Δ) et (CD) sont parallèles.

5) d)

① C' le symétrique du point C par rapport à la droite (Δ) ⟹ (Δ) est la médiatrice de [CC'] ⟹ (Δ) porte la médiane issue de J dans le triangle JCC'.

②

$g(C) = O \Leftrightarrow h_{\left(J,\frac{1}{2}\right)} \circ S_{\Delta}(C) = O$

$\Leftrightarrow h_{\left(J,\frac{1}{2}\right)}(C') = O$ car $S_{\Delta}(C) = C'$

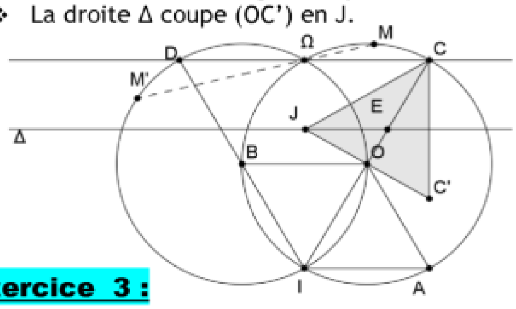
$\Leftrightarrow \overrightarrow{JO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JC'} \Leftrightarrow$ O le milieu de $[JC']$

⟹ (CO) porte la médiane issue de C dans le triangle JCC'

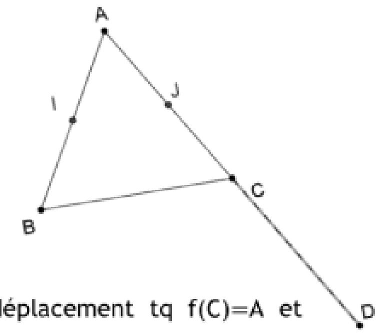
Comme (Δ)∩(CO)={E} alors E est le centre de gravité de du triangle JCC'.

5)c) Procédé de construction :

- On construit le point E tel que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EO}$
- L'axe (Δ) est la droite passante par E et parallèle à (CD) .
- On construit C' image de C par S_{Δ}.
- La droite Δ coupe (OC') en J.



Exercice 3 :



1) f est l'antidéplacement tq f(C)=A et f(A)=B.

⟹ f est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante

Comme fof(C)=B≠C alors f n'est pas une symétrie orthogonale, donc f est une symétrie glissante . Soit Δ son axe et u son vecteur.

$fof(C) = B \Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\overrightarrow{CB}}{2} = \overrightarrow{JI}$.

$\left.\begin{array}{l} f(C) = A \Rightarrow C * A = J \in \Delta \\ f(A) = B \Rightarrow A * B = I \in \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = (IJ)$

2) g la similitude directe tq g(B)= D et g(I)=C.

On sait qu'une similitude conserve les milieux

On a $I = A * B \Rightarrow g(I) = g(A) * g(B)$

$\Rightarrow C = g(A) * D$

$\Rightarrow g(A) = A$ car $C = A * D$

g la similitude directe tq g(A)=A et g(B)= D

Le centre de g est le point A.

Le rapport de g est $\frac{AD}{AB} = \frac{2AB}{AB} = 2$

L'angle de g est $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

3) Ω le point définie par $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I} = \vec{0}$

3) a) fog est la composée d'une similitude directe g et une similitude indirecte f donc fog est une similitude indirecte.

3) b) $f \circ g(I) = f(C) = A$

$f \circ g(A) = f(A) = B$

3)c) On a

$$\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{\Omega I} + 2\overrightarrow{AI}$$
$$= \left(\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AI}\right)$$
$$= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$

On a $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I} = \vec{0}$ signifie que **Ω** est le barycentre des points (A,1) et (I,2)

et on sait qu'une similitude conserve le barycentre $\Rightarrow$ fog(**Ω**) est le barycentre des points (fog(A),1) et (fog(I),2)

$\Rightarrow$ fog(Ω) est le barycentre des points (B ,1) et (A , 2)

$\Rightarrow$ fog(**Ω**)= **Ω** car $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ **Ω** est le centre de fog .

4) a) $f \circ g(I) = A$ et $f \circ g(A) = B \Rightarrow$ le rapport de la similitude fog est $\frac{AB}{IA} = \frac{2IA}{IA} = 2$

Autrement :

fog est la composée d'une similitude directe g de rapport 2 et une similitude indirecte f de rapport 1 donc fog est une similitude indirecte de rapport 2×1=2.

4) b) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte fog de centre **Ω** et de rapport 2 donc

$f \circ g = S_\Delta \circ h_{(\Omega,2)}$ (Forme réduite de fog)

$f \circ g(A) = B \Leftrightarrow S_\Delta \circ h_{(\Omega,2)}(A) = B$

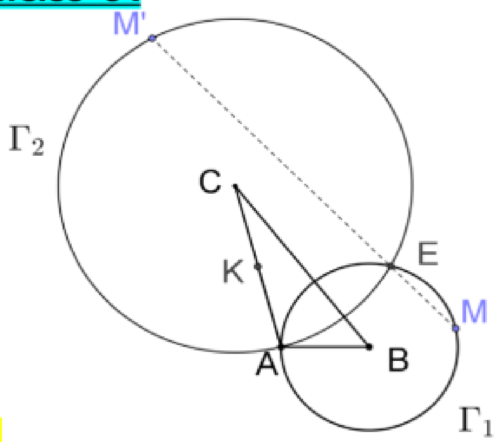
Soit $A' = h_{(\Omega,2)}(A) \Rightarrow \Omega, A$ et A' sont alignés

et on sait que $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0} \Rightarrow$ **Ω**, A et B sont alignés donc **Ω**, A, A' et B sont alignés .

$S_\Delta \circ h_{(\Omega,2)}(A) = B \Leftrightarrow S_\Delta(A') = B$

$\Rightarrow$ Δ est perpendiculaire à (A'B)=(AB) en **Ω**. Car l'axe d'une similitude indirecte passe par son centre

Exercice 3 :



1)a)

S_A la similitude directe de centre A transformant (Γ_1) de centre B en (Γ_2) de centre C$\Rightarrow S_A(B)=C$

$$\left.\begin{array}{l} S_A(A) = A \\ S_A(B) = C \\ S_A(M) = M' \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM'}\right)}[2\pi]$$

Car une similitude directe conserve les mesures de angles orientés.

1)b)

Les points A, M et E sont sur le cercle (Γ_1) de centre B $\Rightarrow$ $\underbrace{\widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)}}_{\text{angle au centre}} \equiv 2\underbrace{\widehat{\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EM}\right)}}_{\text{angle inscrit}}[2\pi]$

Les points A, M' et E sont sur le cercle (Γ_2) de centre C $\Rightarrow$ $\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM'}\right)} \equiv 2\widehat{\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EM'}\right)}[2\pi]$

Or d'après 1) a) on a :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM'}\right)}[2\pi] \Leftrightarrow$$
$$2\widehat{\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EM}\right)} \equiv 2\widehat{\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EM'}\right)}[2\pi] \Leftrightarrow$$
$$\widehat{\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EM}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EM'}\right)}[\pi] \Leftrightarrow$$
$$\widehat{\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EM}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EM'}\right)} \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow$$
$$\widehat{\left(\overrightarrow{EM'},\overrightarrow{EM}\right)} \equiv 0[\pi]$$

$\Rightarrow$ les points M , E et M' sont alignés

2)a)

σ_A la similitude directe de centre A transformant (Γ_1) de centre B en (Γ_2) de centre C $\Rightarrow \sigma_A(B)=C$

$\left.\begin{array}{l}\sigma_A(A)=A\\ \sigma_A(B)=C\end{array}\right\} \Rightarrow$ le rapport $k=\frac{AC}{AB}=\frac{2AB}{AB}=2$

Soit Δ l'axe de la similitude directe σ_A

$\sigma_A(B)=C \Rightarrow \Delta$ porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ ①

D'autre part le triangle ABK est isocèle en A car AC =2AB et K le milieu de [AC]. ②

① et ② $\Rightarrow \Delta$ est la médiatrice du segment [BK]

2) b) $f=\sigma_A \circ S_A^{-1}$

$S_A = S^{directe}_{(A,2,\theta)} \Leftrightarrow S_A^{-1} = S^{directe}_{(A,\frac{1}{2},-\theta)}$

$\sigma_A = S^{indirecte}_{(A,2,\Delta)}$

f est la composée d'une similitude directe S_A^{-1} de rapport $\frac{1}{2}$ et une similitude indirecte σ_A de rapport 2 donc f est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{2}\times 2=1$, donc f est un antidéplacement , alors f est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante

$\left.\begin{array}{l}f(A)=\sigma_A \circ S_A^{-1}(A)=\sigma_A(A)=A\\ f(C)=\sigma_A \circ S_A^{-1}(C)=\sigma_A(B)=C\end{array}\right\} \Rightarrow$

f est une symétrie orthogonale d'axe (AC)

2)c) Soit M un point du plan

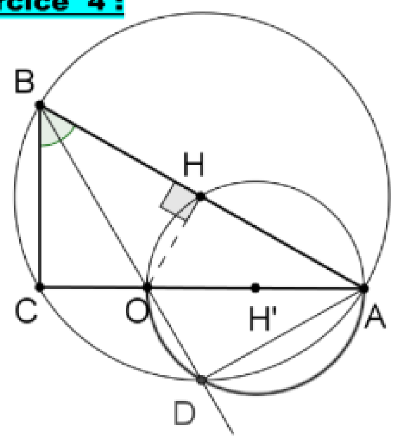
$\left.\begin{array}{l}M'=S_A(M) \Leftrightarrow M=S_A^{-1}(M')\\ M''=\sigma_A(M)\end{array}\right\} \Rightarrow M''=\sigma_A \circ S_A^{-1}(M')$

$\Leftrightarrow M''=f(M')$

$\Leftrightarrow M''=S_{(AC)}(M')$

Signifie que les images par S_A et σ_A de tout point M sont symétriques par rapport à (AC).

Exercice 4 :



1)

ABC un triangle rectangle en C tq

$(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})=\frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow \widehat{CAB}=\frac{\pi}{6}$

[BO) est la bissectrice intérieure de $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$

$\Rightarrow \widehat{ABO}=\frac{\pi}{6}$

Donc le triangle OAB est isocèle en O

comme H est le projeté orthogonal de O sur (AB) alors H est le milieu de [AB]

2)a) f la similitude **directe** tq f(B)=O et f(H)=H'.

$\left.\begin{array}{l}f(B)=O\\ f(H)=H'\end{array}\right\} \Rightarrow$ le rapport de f est

$$k=\frac{OH'}{BH}=\frac{\frac{1}{2}OA}{HA}=\frac{1}{2}\frac{OA}{HA}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

En effet le triangle AOH est rectangle en H

$$\frac{OA}{HA}=\frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé à }\widehat{HOA}}=\frac{1}{\sin(\widehat{HOA})}$$

$\left.\begin{array}{l}f(B)=O\\ f(H)=H'\end{array}\right\} \Rightarrow$ l'angle de f est

$$(\widehat{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{OH'}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{HA},\overrightarrow{H'A}})[2\pi]\equiv(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AH'}})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi$$

2)b)

On sait qu'une similitude conserve les milieux

On a $H=A*B \Rightarrow f(H)=f(A)*f(B)$

$\Rightarrow H'=f(A)*O$

$\Rightarrow f(A)=A$ car $H'=A*O$

$\Rightarrow$ le point A est le centre de f.

3)a)

Le triangle ABD est inscrit dans le cercle (Γ) de diamètre son coté [AB]$\Rightarrow$ (BD)$\perp$(AD) ①

Le triangle AOD est inscrit dans le cercle (Γ') de diamètre son coté [AO]$\Rightarrow$ (OD)$\perp$(AD) ②

① et ② $\Rightarrow$ (BD) et (OD) sont parallèles

$\Rightarrow$ les points O, B et D sont alignés.

3) b)

Le triangle ABD est rectangle en C et H le milieu de [AB] $\Rightarrow$ HC=HB $\Rightarrow$ BCH est isocèle en H

Or $\widehat{HBC}=60°$ alors BCH est équilatéral

De même ODH' est équilatéral.

Montrons que f(C)=D

On sait qu'une similitude directe conserve les mesures des angles orientés

$\left.\begin{array}{l} f(H)=H' \\ f(B)=O \\ f(C)=X \\ HBC \text{ équilatéral direct} \end{array}\right\} \Rightarrow H'OX$ équilatéral direct

$\Leftrightarrow f(C)=D$

3)c)

$H'O=H'H$ et $\widehat{HOH'}=60° \Rightarrow OHH'$ est équilatéral

et on sait que $OH'D$ est équilatéral donc $OH=OD$

et $H'H=H'D \Rightarrow (OH')$ est la médiatrice de $[HD]$

$\Rightarrow (AC)$ est la médiatrice de $[HD]$

$\Rightarrow AH=AD$ et $CH=CD$

Comme $HC=AH$ alors $AH=AD=CH=CD$

Donc ADCH est un losange.

4) $g=S_{(DH)}\circ f$ où $S_{(DH)}$ la symétrie axiale .

4) a) $g(A)=S_{(DH)}\circ f(A)=S_{(DH)}(A)=C$ car ADCH est un losange $\Rightarrow (DH)$ =médiatrice de $[AC]$

$g(C)=S_{(DH)}\circ f(C)=S_{(DH)}(D)=D$

4) b) g est la composée d'une similitude directe f de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et une similitude indirecte $S_{(DH)}$ de rapport 1 donc g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}\times 1=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4)c) Soit Ω le centre de g .

g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$

donc $g\circ g=h_{\left(\Omega,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}=h_{\left(\Omega,\frac{1}{3}\right)}$

Or $g(A)=C$ et $g(C)=D \Rightarrow gog(A)=D$ sgnifie que

$h_{\left(\Omega,\frac{1}{3}\right)}(A)=D \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega D}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$

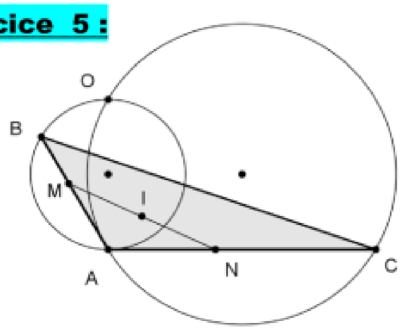
$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A}=3\overrightarrow{\Omega D}$

Construction :

On construit le centre Ω tel que $\overrightarrow{\Omega A}=3\overrightarrow{\Omega D}$

$g(A)=C \Rightarrow$ l'axe Δ de g porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A\Omega C}$.

Exercice 5 :



1)a) S la similitude **directe** tq $S(B)=A$ et $S(A)=C$

$\left.\begin{array}{l} S(B)=A \\ S(A)=C \end{array}\right\} \Rightarrow$ le rapport $k=\frac{AC}{BA}=\frac{2AB}{BA}=2$

l'angle est $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv \pi+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1)b) Soit Ω le centre de S.

$\left.\begin{array}{l} S(\Omega)=\Omega \\ S(B)=A \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Rightarrow$ Ω $\in$ au cercle passant par B et A et tangente à (AT) en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Rightarrow (AT)=(AC)$ car $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

donc $\Omega \in (\mathscr{C}_1)$ ①

de même

$\left.\begin{array}{l} S(\Omega)=\Omega \\ S(A)=C \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow$ Ω $\in$ au cercle passant par A et C et tangente à (AT) en A tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow (AT)=(AB)$

donc $\Omega \in (\mathscr{C}_2)$ ②

① et ② $\Rightarrow$ $\Omega \in (\mathscr{C}_1) \cap (\mathscr{C}_2)=\{A, O\}$

Comme $S(A)=C \neq A$ alors $\Omega=O$ le centre de S.

Montrons que $S(\mathscr{C}_1)=\mathscr{C}_2$.

$\mathscr{C}_1$ est le cercle circonscrit au triangle ABO

Donc $S(\mathscr{C}_1)$ est le cercle circonscrit au triangle $S(ABO)=CAO \Rightarrow S(\mathscr{C}_1)=\mathscr{C}_2$.

2)a)

$\left.\begin{array}{l} S(B)=A \\ S=S^{directe}_{\left(O,2,\frac{\pi}{3}\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} OA=2OB \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{array}\right.$

En appliquant une formule d'Akashi dans le triangle OAB on obtient :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$$
$$= OA^2 + OB^2 - OA \times OB$$
$$= OA^2 + OB^2 - 2OB \times OB$$
$$= OA^2 - OB^2$$
$$\Rightarrow OA^2 = AB^2 + OB^2$$

D'après la réciproque de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en B

2)b) Le triangle OAB est rectangle en B

$\Rightarrow (OB) \perp (AB)$

$\Rightarrow S(OB) \perp S(AB)$ car une similitude conserve l'orthogonalité

$\Rightarrow (OA) \perp (CA)$

$\Rightarrow$ Le triangle OAC est rectangle en A.

Autrement

Le triangle OAB est rectangle en B $\Rightarrow$ S(OAB) est un triangle rectangle en S(B) car une similitude conserve l'orthogonalité signifie que OBC est rectangle en A

2)c) M∈[AB] et N∈[AC] $\Rightarrow$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AN}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi] \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\left.\begin{array}{l} AN = 2BM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AN}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ S(A) = B \end{array}\right\} \Rightarrow S(M) = N \quad \text{car } S = S^{\text{directe}}_{(O,2,\frac{\pi}{3})}$$

2)d) I le milieu de [MN] et S(M)=N

$\Rightarrow$ I est le milieu de [MS(M)]

M∈[AB] $\Rightarrow$ S(M) ∈ S([AB])=[AC]

Si M=A $\Rightarrow$ S(M)=S(A) $\Leftrightarrow$ N=B $\Rightarrow$ I=A∗B

Si M=B $\Rightarrow$ S(M)=S(B) $\Leftrightarrow$ N=C $\Rightarrow$ I=B∗C

lorsque M décrit [AB] , le point N décrit le segment [AC]$\Rightarrow$l'ensemble des points I est le segment joignant les milieux des [AB] et [AC] .

4/ S' la similitude indirecte tq S'(B)=A et S'(A)=C

4)a)

$$\left.\begin{array}{l} S'(B) = A \\ S'(A) = C \end{array}\right\} \Rightarrow \text{le rapport } k = \frac{AC}{BA} = \frac{2AB}{BA} = 2$$

4)b) Soit O' le centre de S'

S' est une similitude indirecte de centre O' et de rapport 2 $\Rightarrow S' \circ S' = h_{(O',2^2)} = h_{(O',4)}$

4) c)

$S' \circ S'(B) = S'(A) = C \quad \Leftrightarrow$

$h_{(O',4)}(B) = C \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{O'C} = 4\overrightarrow{O'B}$

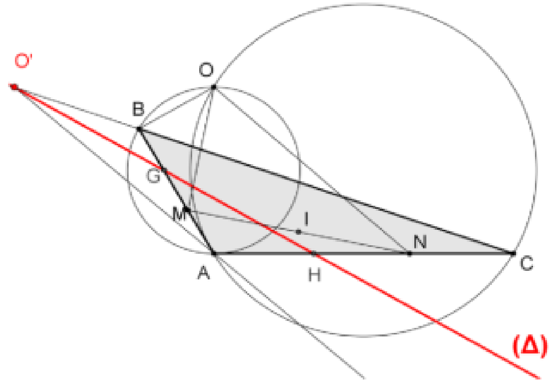
Construction du centre O' :

$$\overrightarrow{O'C} = 4\overrightarrow{O'B} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'C} = 4\overrightarrow{O'C} + 4\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CO'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$$

Construction de l'axe Δ :

$$\left.\begin{array}{l} S'(B) = A \\ O' \text{ le centre de } S' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Δ porte la bissectrice intérieure de $\widehat{BO'A}$



4)d) Δ coupe (AB) en G et (AC) en H.

Montrons que G est le milieu de [O'H].

S' est une similitude indirecte de centre O', de rapport 2 et d'axe Δ donc la **forme réduite** de S':

$$S' = h_{(O',2)} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{(O',2)}$$

$G = \Delta \cap (AB) \Rightarrow$

$S'(G) = S'(\Delta) \cap S'(AB)$

$= \Delta \cap (CA)$ car $O' \in \Delta$

$= H$

$S'(G) = H \quad \Leftrightarrow h_{(O',2)} \circ S_\Delta(G) = H$

$\Leftrightarrow h_{(O',2)}(G) = H$ car $G \in \Delta$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{O'H} = 2\overrightarrow{O'G} \quad \Leftrightarrow$ G est le milieu de$[O'H]$

Montrons que S(G)=H

$S^{-1} \circ S'$ est une similitude indirecte de rapport 1 donc est un antidéplacement , soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante

$$\left.\begin{array}{l} S^{-1} \circ S'(A) = S^{-1}(C) = A \\ S^{-1} \circ S'(B) = S^{-1}(A) = B \end{array}\right\} \Rightarrow S^{-1} \circ S' = S_{(AB)}$$

$\Rightarrow S^{-1} \circ S'(G) = S_{(AB)}(G) = G$ car $G \in (AB)$

Comme $S'(G) = H$ alors $S^{-1}(H) = G \Leftrightarrow S(G) = H$

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$$
$$= OA^2 + OB^2 - OA \times OB$$
$$= OA^2 + OB^2 - 2OB \times OB$$
$$= OA^2 - OB^2$$
$$\Rightarrow OA^2 = AB^2 + OB^2$$

D'après la réciproque de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en B

2)b) Le triangle OAB est rectangle en B
$\Longrightarrow (OB) \perp (AB)$
$\Longrightarrow S(OB) \perp S(AB)$ car une similitude conserve l'orthogonalité
$\Longrightarrow (OA) \perp (CA)$
$\Longrightarrow$ Le triangle OAC est rectangle en A.

Autrement
Le triangle OAB est rectangle en B $\Longrightarrow$ S(OAB) est un triangle rectangle en S(B) car une similitude conserve l'orthogonalité signifie que OBC est rectangle en A

2)c) M∈[AB] et N∈[AC] $\Longrightarrow$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AN}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}}\right)[2\pi] \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\left.\begin{array}{l} AN = 2BM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AN}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ S(A) = B \end{array}\right\} \Rightarrow S(M) = N \quad \text{car } S = S^{\text{directe}}_{\left(O,2,\frac{\pi}{3}\right)}$$

2)d) I le milieu de [MN] et S(M)=N
$\Longrightarrow$ I est le milieu de [MS(M)]
M∈[AB] $\Longrightarrow$ S(M) ∈ S([AB])=[AC]
Si M=A $\Longrightarrow$ S(M)=S(A) $\Longleftrightarrow$ N=B $\Longrightarrow$ I=A∗B
Si M=B $\Longrightarrow$ S(M)=S(B) $\Longleftrightarrow$ N=C $\Longrightarrow$ I=B∗C
lorsque M décrit [AB] , le point N décrit le segment [AC]$\Longrightarrow$l'ensemble des points I est le segment joignant les milieux des [AB] et [AC] .

3/ S' la similitude indirecte tq S'(B)=A et S'(A)=C

4)a)
$$\left.\begin{array}{l} S'(B) = A \\ S'(A) = C \end{array}\right\} \Rightarrow \text{le rapport } k = \frac{AC}{BA} = \frac{2AB}{BA} = 2$$

4)b) Soit O' le centre de S'
S' est une similitude indirecte de centre O' et de rapport 2 $\Longrightarrow S' \circ S' = h_{(O',2^2)} = h_{(O',4)}$

4) c)
$S' \circ S'(B) = S'(A) = C \quad \Leftrightarrow$
$h_{(O',4)}(B) = C \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{O'C} = 4\overrightarrow{O'B}$

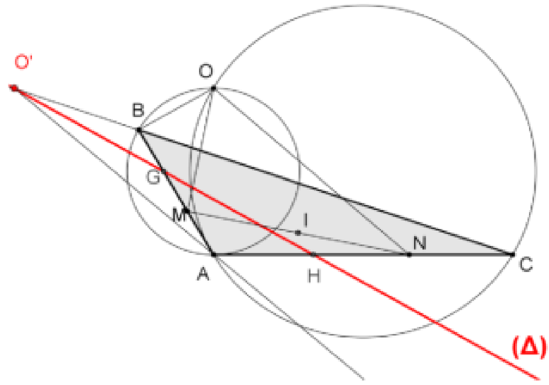
Construction du centre O' :

$$\overrightarrow{O'C} = 4\overrightarrow{O'B} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'C} = 4\overrightarrow{O'C} + 4\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CO'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$$

Construction de l'axe Δ :

$$\left.\begin{array}{l} S'(B) = A \\ O' \text{ le centre de } S' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Δ porte la bissectrice intérieure de $\widehat{BO'A}$



4)d) Δ coupe (AB) en G et (AC) en H.
Montrons que G est le milieu de [O'H].
S' est une similitude indirecte de centre O', de rapport 2 et d'axe Δ donc la **forme réduite** de S':

$$S' = h_{(O',2)} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{(O',2)}$$

$G = \Delta \cap (AB) \Rightarrow$
$S'(G) = S'(\Delta) \cap S'(AB)$
$= \Delta \cap (CA)$ car $O' \in \Delta$
$= H$
$S'(G) = H \quad \Leftrightarrow h_{(O',2)} \circ S_\Delta(G) = H$
$\Leftrightarrow h_{(O',2)}(G) = H$ car $G \in \Delta$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{O'H} = 2\overrightarrow{O'G} \quad \Leftrightarrow$ G est le milieu de $[O'H]$

Montrons que S(G)=H
$S^{-1} \circ S'$ est une similitude indirecte de rapport 1 donc est un antidéplacement , soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante

$$\left.\begin{array}{l} S^{-1} \circ S'(A) = S^{-1}(C) = A \\ S^{-1} \circ S'(B) = S^{-1}(A) = B \end{array}\right\} \Rightarrow S^{-1} \circ S' = S_{(AB)}$$

$\Rightarrow S^{-1} \circ S'(G) = S_{(AB)}(G) = G$ car $G \in (AB)$

Comme $S'(G) = H$ alors $S^{-1}(H) = G \Leftrightarrow S(G) = H$