Exercice 1

Soit $f: [-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2+2x-4$

1°) Montrer que f est une bijection de $[-1,2]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2°) Soit f^{-1} la réciproque de f. Etudier la continuuité et le sens de variation de f^{-1} sur J.

3°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4°) Construire $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan et en déduire la construction de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans ce même repère.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=2\sqrt{x}-x$

1°) Etudier la dérivabilité de f sur $[0,1]$ et donner le sens de variation de f.

2°) Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur lui même. Soit f^{-1} sa réciproque.

3°) Construire $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé.

4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1°) Montrer que f est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]2,+\infty[$

2°) Soit f^{-1} sa réciproque, construire $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]2,+\infty[$.

Exercice 4

Soit la fonction g définie par $g(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{+\infty} g$, $\lim\limits_{-\infty} g$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x)>0$.

2°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x)=g(x)$

b) Etudier les variations de f.

3°) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

4°) Déterminer le domaine de continuité et de dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} de f ainsi que son sens de variation.

5°) a) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

b) Calculer $f^{-1}(2)$ puis calculer $(f^{-1})'(2)$ de deux manières différentes puis en déduire la construction de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point $A(2, f^{-1}(2))$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $f(x) = \sin x - \frac{1}{x}$.

1°) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,\pi]$ et calculer $f'(x)$.

b) Etudier les variations de f'. En déduire l'existence d'un seul réel x_0 de $]0,\pi]$ tels que $f'(x_0) = 0$.

c) Donner alors le signe de $f'(x)$ sur $]0,\pi]$.

2°) a) Calculer $f(\frac{\pi}{2})$ et $f'(\frac{\pi}{2})$. En déduire la position de x_0 par rapport à $\frac{\pi}{2}$ et le signe du réel $f(x_0)$.

b) Montrer alors que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux racines p et q sur $]0,\pi]$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1-\cos \pi x}$.

1°) Etudier le sens de variation de f et construire sa courbe C dans un repère orthonormé.

2°) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0 dans $]0,1]$.
Calculer $f(\frac{2}{3})$ et en déduire x_0.

3°) a) Démontrer que f est une bijection de $]0,1]$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
On pose h sa réciproque.

b) Etudier la continuité, le sens de variation de h et construire sa courbe C' dans le même repère.

c) Montrer que h est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et que $h'(x) = \frac{-1}{\pi x \sqrt{2x-1}}$.

Problème

I/ Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{|x^2-4|}$.

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2.
Interpréter géométriquement les résultats trouvés.

2/a- Justifier la dérivabilité de f sur $[0;+\infty[\backslash\{2\}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

3/a- Prouver que f est bijective de $[2;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b- Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

c- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

II/ Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n); \forall n \in IN$

1/ Montrer que $\forall n \in IN; 0 \leq u_n \leq 1$.

2/ Montrer que (u_n) est décroissante

3/ En déduire que (u_n) est convergente vers un réel L.

4/a- Montrer que $\forall n \in IN; \frac{1}{8}u_n^3 \leq u_n - u_{n+1}$.

b- En déduire la valeur de L.

III/ Soit $h : \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\to IR; x \mapsto tgx$.

1/ Montrer que h réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0;+\infty[$.

2/ On note $H = h^{-1}$. Montrer que H est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $H'(x) = \frac{1}{1+x^2}; \forall x \in [0;+\infty[$.

3/ Soit Ψ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par
$\Psi(x) = H[f(x)+1] + H\left[\frac{1}{f(x)+1}\right]; \forall x \in IR^+$

a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \Psi(x)$.

b- Justifier que Ψ est dérivable sur $IR^+\backslash\{2\}$.

c- Montrer que $\Psi'(x) = 0; \forall x \in IR^+\backslash\{2\}$.

d- Calculer enfin $\Psi(x); \forall x \in IR^+\backslash\{2\}$