

Énoncé

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de \mathcal{P} d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

1) Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E' , image de E par f .

2) Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

3) On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .

Soit M un point distinct des points O , A et B .

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0 , 1 et -1 , on a :

$$\frac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)^2.$$

b. En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de

l'angle $(\vec{M'A}, \vec{M'B})$ en fonction de l'angle (\vec{MA}, \vec{MB}) .

4) Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O , alors M' est un point de Δ .

Figure

Indic.

Solution

Indic.

Solution

Indic.

Solution

Théorie

Indic.

Solution

Indic.

Solution