Le plan orienté dans le sens direct.

Exercice 1

Soit a un réel strictement positif

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ L'équation : $z^2-(1+i)az+ia^2=0$
2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\vec{\iota},\vec{\jmath}$)), On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.
   a) Quelle est la nature du triangle OAB ?
   b) Déterminer l'affixe du point C te que OACB soit un carré.
   a) Montrer que l'affixe de P est égale à $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
   b) Calculer L'affixe du point Q.
   c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{C}$**,** l'équation $(E): z^3-2z^2-iz-i=0$

1) a) Vérifier que (E) admet une solution réelle.
   b) En déduire la résolution de (E)
2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\vec{\iota},\vec{\jmath}$)), A,B et C les points d'affixes $Z_A=-1, Z_B=1-i$ et $Z_C=2+i$.
   a) Déterminer l'affixe du point B tel que $B'=R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}(B)$
   b) Montrer que ABCB' est un carré
3) soit f l'antidéplacement tel que $f(A)=C$ et $f(B)=B'$ et I le centre du carré ABCB'.
   a) Montrer que $f=S_I o S_{(AB)}$ (avec S_I la symétrie centrale de centre I).
   b) En déduire que f est une symétrie glissante dont on présidera la forme reduite.
4) Soit g l'application du plan P dans lui-même qui à tout point d'affixe z associe le point M' D'affixe z' tel que $z'=i\bar{z}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$.
   a) vérifier que $g=S_{(O,\vec{\iota})} o R'$ avec R' une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
   b) soit E et F les point d'affixe respectifs $\frac{5}{2}$ et $2-\frac{1}{2}i$. Déterminer $g(E)$ et $g(F)$.
   c) En déduire la nature de g

Exercice 2

On considère un triangle OAB tel que $OB=2OA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On pose I le milieu du segment$[OB]$.

1) a-Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(O)=I$ et $f(A)=B$
   b- Montrer que f est une rotation d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.
2) la droite perpendiculaire à (OB) passant par I est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B se coupe en C.
   a- Déterminer l'image de la droite (OB) par f Puis montrer que $f(B)=C$.
   En déduire que le centre Ω de f est le milieu du segment $[AC]$.
3) Soit D le milieu du segment $[IC]$

a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que $g(O) = I$ et $g(A) = D$.

b- Montrer que g est une symétrie glissante.

c- Soit J le milieu du segment $[OI]$, Montrer que $g = S_J oS_{(OA)}$ et en déduire la forme réduite de g. (avec S_J la symétrie centrale de centre J).

Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par E le symétrique de A par rapport à (BC).

Soit D,I et J les milieux respectives des segments [AC] , [BC] et [EC].

1) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que $f(D) = E$ et $f(C) = B$

b) Caractériser f.

2) soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle JCD.

Soit M un point de l'arc $[\widehat{CJ}]$ du cercle $\mathscr{C}$ ne contenant pas D privé de J et C.

On désigne par S_I la symétrie centrale de centre I . On pose $g = S_I o f$ et par $M' = g(M)$

a) Déterminer $g(C)$ puis caractériser g.

b) Donner la nature du triangle CMM' .

c) Montrer que $g(J) = D$.

d) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{M'M},\overrightarrow{M'D}}\right) \equiv \pi[2\pi]$.

e) En déduire que $MJ + MC = MD$.

3) Soit L le symétrique de J par rapport à la droite (DC). On pose $\varphi = goS_{(IJ)}$.

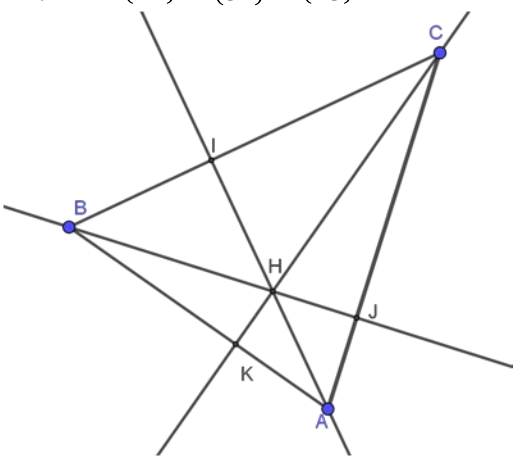
a) Déterminer $\varphi(J)$ et $\varphi(D)$

b) caractériser φ

Exercice 4

On considère un triangle ABC. On se propose d'étudier l'application $f = S_{(AB)}oS_{(CA)}oS_{(BC)}$.

On désigne par I,J et K Les pied des hauteurs du triangle ABC issus respectivement de A,B et C et par H l'orthocentre du triangle ABC



1) a) Démontrer que f est un antidéplacement.

c) Soit S une symétrie orthogonale, Démontrer que les applications $S_{(AB)}oS_{(CA)}$ et $SoS_{(BC)}$ sont distinctes. En déduire que f n'est pas une symétrie orthogonale.

2) a) Démontrer les égalités $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IK}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HK}}\right)[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{HJ},\overrightarrow{HC}}\right)[2\pi]$

b) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{IK}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{IJ}}\right)[2\pi]$.Quelle est l'image de droite (IK) par $S_{(BC)}$.

c) Montrer que la droite (IK) est globalement invariante par f.

3) On désigne par $I' = f(I)$ démontrer légalité $AI' = AI$ et en déduire une construction de I'.

4) Démontrer que $f = t_{\overrightarrow{II'}}oS_{(IK)}$

Exercice 5

On considère un triangle ABC rectangle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et les triangles ACD et AEB isocèles directs et rectangle en A. On désigne par I,J et K les milieux respectifs de $[CD]$, $[AC]$ et $[AD]$.

1-

a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en D et C en A.

b) Prouver que f est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) soit $F = f(B)$. Montrer que les points A,C et F sont alignés .

2- soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $t = foR$.

a) Déterminer $t(E)$

b) Montrer que t est une translation dont on déterminera le vecteur.

c) En déduire que AEFD est un parallélogramme.

3- soit g l'antidéplacement qui envoie A en D et C en A.

a) Montrer que g est une symétrie glissante.

b) Déduire la forme réduite de g.

4- Soit J' le symétrique de J par rapport à I.

a) Déterminer $got^{-1}(D)$ et prouver que $got^{-1}(J') = K$

b) Déduire que $got^{-1} = S_{(CD)}$

c) Déduire alors l'ensemble des points M du plan tel que $g(M) = t(M)$.