Sujet n°6

Séance 1

EXERCICE 1 :

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :
$f(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ et voici son tableau de variation. Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par :
$u_n = \sum_{k=1}^{n} ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2) a) Montrer que pour tout $k \in IN^*$, on a : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
   b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a : $u_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}$
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel L et que $0,7 \leq \text{L} \leq 1$

EXERCICE 2 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$
et voici ci-contre son tableau de variation sur $[0,1]$
et (a_n) une suite réelle définie sur IN par :
$a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$

1) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
2) a) Montrer que pour tout n $\in$IN, on a : $0 < a_n \leq 1$
   b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
   c) En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.
3) Pour tout $n \in IN$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$
   a) Calculer : u_0 et v_0
   b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L.
   c) Montrer que $2-\sqrt{2} \leq \text{L} \leq 1$

EXERCICE 3 :

On définit pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'intégrale $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\, dx$
1) Calculer I_1
2) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et à termes positifs.
   b) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour entier $n \geq 1$,
   on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

b) En déduire $\int_0^2 (2-x)^2 e^x \, dx$

4) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1)$.

5) On pose pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$

a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

EXERCICE 4 : (Bac blanc 2015 Lycée pilote Menzah 8)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) On pose pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{A}_n$ l'aire en $(u.a)$ du domaine

$D_n = \left\{M(x,y)\,;\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\right\}$. Calculer l'aire $\mathcal{A}_n$

3) On définit pour tout entier $n \geq 1$, la suite $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\, dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \mathcal{A}_n \leq u_n$

c) Montrer alors que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$\mathcal{A}_n \leq u_n \leq \mathcal{A}_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

d) Déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

EXERCICE 5 :

Un responsable d'un magasin achète des MP_5 auprès de deux fournisseurs F_1 et F_2 dont 25% du fournisseur F_1.

La proportion des MP_5 du deuxième choix est de 2% chez le fournisseur F_1 et de 4% chez le second. On considère les événements suivants :

D : ‹‹ Le MP_5 est du deuxième choix ››

F_1 : ‹‹ Le MP_5 provient du fournisseur F_1 ››

F_2 : ‹‹ Le MP_5 provient du fournisseur F_2 ››

1) a) Donner un arbre pondéré qui illustre les données précédentes.

b) Montrer que p(D)= 0,035

c) Un MP_5 est du premier choix. Quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur F_1.

2) Le responsable commande 20 MP_5.

a) Calculer le nombre moyen de MP_5 du deuxième choix dans cette commande.

b) Quelle est la probabilité qu'au moins deux MP_5 dans cette commande soient du deuxième choix.

3) Le responsable achète le MP_5 du fournisseur F_1 à 80 DT et du second fournisseur à 72 DT. Il vend le MP_5 à 125 DT s'il est du premier choix et à 15 DT sinon.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque MP_5 vendu associe le gain algébrique en dinars réalisé par le responsable.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.

4) La durée de vie en mois d'un MP_5 est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité qu'un MP_5 fonctionnait 5 mois est de 0,325.

a) Déterminer λ.

On prend dans la suite λ =0,225

b) Quelle est la probabilité qu'un MP_5 n'est plus fonctionnel après 8 mois.

c) Un MP_5 a duré plus de 3 mois. Quelle est la probabilité qu'il fonctionnait encore une année de plus au maximum.

d) Quelle est la probabilité qu'un MP_5 fonctionnait 3 mois et pourrait fonctionner encore une année de plus.

EXERCICE 6 :

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

S'il a arrêté le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité qu'il arrêtait le $(n+1)^{\text{ieme}}$ est 0,8.

S'il n'a pas arrêté le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité qu'il arrêtait le suivant est 0,6 .

la probabilité qu'il arrêtait le premier tir est 0,7.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'événement:'' le gardien arrête le n^{ieme} tir '' et $p_n = p(A_n)$. On a donc $p_1 = 0{,}7$.

1) a) Donnez pour $n > 1$, les valeurs de $p(A_{n+1} / A_n)$ et $p(\overline{A}_{n+1} / A_n)$

b) Exprimez $p(A_{n+1} / A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap A_n)$ en fonction de p_n

c) Déduire que, pour tout entier $n \geq 1$ on a : $p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}6$.

On pose, pour $n > 1$ $u_n = p_n - 0{,}75$

2) a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2

b) Déduire une expression de p_n en fonction de n

c) Quelle est alors la probabilité que ce gardien arrêtait le $30^{\text{éme}}$ tir.