

Sujet n°6

Séance 1

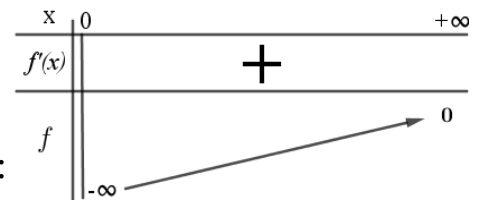
EXERCICE 1 :

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

et voici son tableau de variation. Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$



1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel L et que $0,7 \leq L \leq 1$

EXERCICE 2 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

et voici ci-contre son tableau de variation sur $[0, 1]$

et (a_n) une suite réelle définie sur \mathbb{N} par :

$$a_0 = 1 \text{ et } a_{n+1} = f(a_n)$$

1) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < a_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

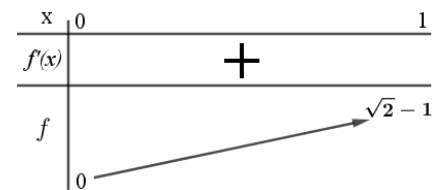
c) En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite ℓ .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

a) Calculer : u_0 et v_0

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L .

c) Montrer que $2 - \sqrt{2} \leq L \leq 1$



EXERCICE 3 :

On définit pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'intégrale $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$

1) Calculer I_1

2) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et à termes positifs.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour entier $n \geq 1$,

$$\text{on a : } I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) En déduire $\int_0^2 (2-x)^2 e^x dx$

4) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$.

5) On pose pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$

a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

EXERCICE 4 : (Bac blanc 2015 Lycée pilote Menzah 8)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f .

2) On pose pour tout entier $n \geq 1$, \mathcal{A}_n l'aire en (u, a) du domaine

$$D_n = \left\{ M(x, y) ; \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \right\}. \text{ Calculer l'aire } \mathcal{A}_n$$

3) On définit pour tout entier $n \geq 1$, la suite $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{où } k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \mathcal{A}_n \leq u_n$

c) Montrer alors que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\mathcal{A}_n \leq u_n \leq \mathcal{A}_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

d) Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

EXERCICE 5 :

Un responsable d'un magasin achète des MP_5 auprès de deux fournisseurs F_1 et F_2 dont 25% du fournisseur F_1 .

La proportion des MP_5 du deuxième choix est de 2% chez le fournisseur F_1 et de 4% chez le second. On considère les événements suivants :

D : « Le MP_5 est du deuxième choix »

F_1 : « Le MP_5 provient du fournisseur F_1 »

F_2 : « Le MP_5 provient du fournisseur F_2 »

1) a) Donner un arbre pondéré qui illustre les données précédentes.

b) Montrer que $p(D) = 0,035$

c) Un MP_5 est du premier choix. Quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur F_1 .

2) Le responsable commande 20 MP_5 .

- a) Calculer le nombre moyen de MP_5 du deuxième choix dans cette commande.
- b) Quelle est la probabilité qu'au moins deux MP_5 dans cette commande soient du deuxième choix.
- 3) Le responsable achète le MP_5 du fournisseur F_1 à 80 DT et du second fournisseur à 72 DT. Il vend le MP_5 à 125 DT s'il est du premier choix et à 15 DT sinon.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque MP_5 vendu associe le gain algébrique en dinars réalisé par le responsable.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter ce résultat.
- 4) La durée de vie en mois d'un MP_5 est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . La probabilité qu'un MP_5 fonctionnait 5 mois est de 0,325.

a) Déterminer λ .

On prend dans la suite $\lambda = 0,225$

- b) Quelle est la probabilité qu'un MP_5 n'est plus fonctionnel après 8 mois.
- c) Un MP_5 a duré plus de 3 mois. Quelle est la probabilité qu'il fonctionnait encore une année de plus au maximum.
- d) Quelle est la probabilité qu'un MP_5 fonctionnait 3 mois et pourrait fonctionner encore une année de plus.

EXERCICE 6 :

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

S'il a arrêté le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité qu'il arrêterait le $(n + 1)^{\text{ième}}$ est 0,8.

S'il n'a pas arrêté le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité qu'il arrêterait le suivant est 0,6 .
la probabilité qu'il arrêterait le premier tir est 0,7.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'événement: " le gardien arrête le $n^{\text{ième}}$ tir " et $p_n = p(A_n)$. On a donc $p_1 = 0,7$.

- 1) a) Donnez pour $n > 1$, les valeurs de $p(A_{n+1} / A_n)$ et $p(\bar{A}_{n+1} / A_n)$
 b) Exprimez $p(A_{n+1} / A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap A_n)$ en fonction de p_n
 c) Déduire que, pour tout entier $n \geq 1$ on a : $p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,6$.

On pose, pour $n > 1$ $u_n = p_n - 0,75$

- 2) a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2
 b) Déduire une expression de p_n en fonction de n
 c) Quelle est alors la probabilité que ce gardien arrêterait le 30^{ème} tir.