Les fonctions exponentielles

Séance 1

EXERCICE 1 :

1) Ecrire chacune des expressions suivantes sous forme $e^{u(x)}$:

a) $\frac{\left(e^{x-3}.\ e^{2-x}\right)^2}{e^{1-x}}$ b) $(e^{2x-1})^3.e^{4-6x}.e$

2) Développer chacune des expressions suivantes :

$\text{A}(x) = e^{-x}(3e^{2x} - e^{x} + xe^{-x})$ et $\text{B}(x) = (e^{x} + e^{-x}).(e^{x} - e^{-x})$

3) Factoriser par e^x chacune des expressions suivantes :

$\text{E}(x) = e^{3x} - 2e^{x} + 1$ et $\text{F}(x) = e^{x} - 2xe^{-x} + 4e^{2x}$

4) Montrer les relations suivantes :

a) $ln(1+e^x) = x + ln(1+e^{-x})$; $x \in IR$

b) $\frac{ln\,(e^x+x^2e^x)}{x} = 1 + 2\frac{lnx}{x} + \frac{ln\,(1+\frac{1}{x^2})}{x}$; $x > 0$

EXERCICE 2 :

Pour chacune des propositions suivantes une seule réponse est correcte, préciser la :

1) Le réel $\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}$ est égal à :

a) $\frac{1}{\mathrm{e}}$ **b)** e **c)** 1

2) Le réel $\mathrm{e}^{\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]}$ est égal à :

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $-\sqrt{2}$

3) Le réel $\mathrm{e}^{(\mathrm{x}+3\ln \mathrm{x})}$ est égal à :

a) $3\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}$ **b)** $\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{x}^3$ **c)** $\mathrm{x}^3\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$

EXERCICE 3:

Résoudre dans IR les équations et les inéquations suivantes:

a) $2\mathrm{e}^{|3\mathrm{x}-1|} - 1 = 0$ c) $\sqrt{4\mathrm{e}^{3\mathrm{x}-1} - 2} = 1$

b) $3\mathrm{e}^{2\mathrm{x}^2} + \mathrm{e}^{\mathrm{x}^2} - 2 = 0$ d) $\frac{1-3\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-3} \geq 1$

EXERCICE 4:

Calculer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+3e^x+1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x^2)$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+x}}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 + e^{-3x})e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{4x} - 3e^x + x^2)$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - e^{\frac{1}{x}})$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

EXERCICE 5:

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\text{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que le point I(0,1) est un centre de symétrie de (C).

2) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$

En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote è (C) au V($-\infty$).

b) Montrer que (C) admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR.

b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR et que $\alpha \in]-2,-1[$ puis vérifier que $e^\alpha = -\frac{2+\alpha}{\alpha}$

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur IR. Calculer $(f^{-1})'(1)$ et vérifier que $(f^{-1})'(0)=\frac{2}{\alpha^2+2\alpha+2}$

4) a) Tracer la courbe (C) et la courbe (C') de f^{-1}.

b) Calculer l'aire de la région du plan limitée par (C') et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$

5) Soit U la suite définie sur IN par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = ln(1 + 2e^{u_n})$

a) Montrer que pour tout n∈IN, $u_n \geq 0$.

b) Soit $v_n = f(u_n) - u_n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

c) Calculer v_n puis u_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$

EXERCICE 6:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle$[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & si\ x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle que l'on précisera.

d) Tracer (C) et (C') où (C') est la courbe de f^{-1}.

2) x étant un réel tel que $0 < x \leq 1$.

a)Calculer l'intégrale $G(x) = \int_x^1 tf'(t)dt$

b) On pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$. Exprimer F(x)+G(x) en fonction de x.

c) Déduire l'expression de F(x) en fonction de x.

3) α étant un réel tel que $0 < \alpha < 1$

a) Calculer l'air $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limité par (C); l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x= α et x=1.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to0} \mathcal{A}(\alpha)$

c) En déduire l'aire de la partie du plan limité par (C) , (C') et les droites d'equations respectives x = 1 et y= 1