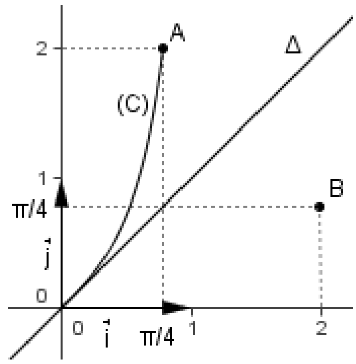
Les intégrales
Géométrie dans l'espace

Séance 2

EXERCICE 1 :

La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = (tanx)^3 + tanx$. La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite $\Delta : y = x$.



1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) dont on précisera le domaine de définition J.

b) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1}.

c) Calculer $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$

3) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (C) et (C') et le segment [AB].

EXERCICE 2 :

Soit F la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{tan^2x} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

1) Montrer que F est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $F'(x) = 2$

2) Calculer $F(\frac{\pi}{4})$. En déduire que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$

3) a) Calculer alors I= $\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer J= $\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2}dt$

EXERCICE 3 :

Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par : $u_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

1) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a :

$u_{n+2} = \frac{1}{3}\int_0^1 x^n(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx$

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, on a : $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}u_n$

c) Calculer alors $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$ et $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx$

EXERCICE 4 :(QCM)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule réponse est correcte. Préciser la :

1) La suite (I_n) définie sur IN par : $I_n = \int_0^n \sqrt{x}\, sin^2x.dx$ est une suite :

a) croissante **b)** décroissante **c)** stationnaire

2) Soit le réel $\boldsymbol{I} = \int_{-1}^1 x^2.sin^3x.dx$. Alors :

a) $\boldsymbol{I} < 0$ **b)** $\boldsymbol{I = 0}$ **c)** $\boldsymbol{I} > 0$

3) On pose pour tout $x \in]0,1[$, $F(x) = \int_x^{x^2} cos^2 t.dt$. Alors :

a) $F(x) < 0$ **b)** $F(x) = 0$ **c)** $F(x) > 0$

4) Soit f une fonction continue sur $[2,3]$ telle que : $4 \leq f(x) \leq 5$ alors :

a) $4 \leq \int_2^3 f(x)dx \leq 5$ **b)** $2 \leq \int_2^3 f(x)dx \leq 3$ **c)** $0 \leq \int_2^3 f(x)dx \leq 1$

5) Soit C= $\left\{M(x,y) \; ; \; y = \frac{tanx}{cosx} \text{ et } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Alors le volume $\mathcal{V}$ de S est égal à :

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{2\pi}{3}$ **c)** $\frac{\pi}{6}$

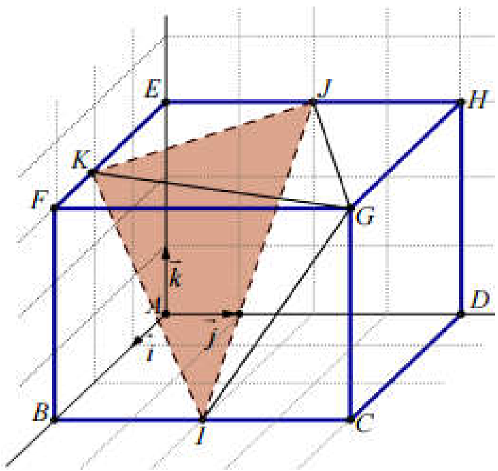
EXERCICE 5 :

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A $(-5,0,0)$ et les plans (P) : $2x - y + 4z - 11 = 0$ et (Q) : $x - 2y - z - 1 = 0$.

1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
 b) Donner un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection D.
2) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de O sur la droite D.
3) a) Déterminer l'équation réduite de la sphère (S) de centre A et tangent au plan (P).
 b) Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on caractérisera.

EXERCICE 6 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère le parallélépipède ABCDEFGH tel que : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$Soit les points I et J les milieux respectifs des arrêtes [BC] et [EH]. Soit K le point définit par $\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



1) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{GF} \wedge \overrightarrow{GE}$

2) Déterminer les coordonnées des points de la figure.
3) a) Calculer l'aire du triangle IJK.
 b) Calculer le volume du tétraèdre IJKG.
 c) En déduire la distance de G au plan (IJK).
4) Ecrire une équation cartésienne du plan (IJK).
5) a) Déterminer un système d'équations paramétrique de la droite Δ perpendiculaire au plan (IJK) et passant par le point G.
 b) Déterminer les coordonnées du point L intersection de Δ et (IJK).

EXERCICE 7 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère le plan P_m : $2x - y + 2z + m = 0$; (m étant un paramètre réel).
Soit l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$

1) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le rayon et le centre Ω.
2) Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m la position relative de (S) et le plan P_m
3) a) Caractériser l'intersection de la sphère (S) et le plan P_3.
 b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans Q et Q' tangents à (S) et parallèles au plan P_3.

EXERCICE 8 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points $A(-2,2,1)$, $B(-2,1,2)$, $C(-1,1,1)$ et $\Omega(-1,2,2)$.

1) Soit l'ensemble P des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$

   a) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à P.

   b) Montrer que P est un plan dont on donnera une équation cartésienne.

2) Calculer $\overrightarrow{A\Omega}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$. En déduire que $\Omega \notin P$.

3) Montrer que le point Ω appartient à l'axe du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.

4) Soit S la sphère de centre $\Omega(-1,2,2)$ et de rayon $R= \sqrt{2}$.

   a) Ecrire une équation cartésienne de S.

   b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle $\mathcal{C}$.

   c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 9 :

On pose pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$

1) a) Vérifier que $I_2 = \frac{8}{15}$

   b) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a :

   $I_{n+1} = (2n+2)\int_0^1 x^2(1-x^2)^n \, dx$

   c) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, on a : $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$

2) On considère les deux fonctions F et G définies sur IR par :

   $F_n(x) = \int_0^{sinx} (1-t^2)^n dt$ et $G_n(x) = \int_0^{x} (cost)^{2n+1} \, dt$

   a) Montrer que f et g sont dérivables sur IR et calculer $F_n'(x)$ et $G_n'(x)$ pour tout $x \in IR$

   b) En déduire que pour tout réel x, on a : $F_n(x) = G_n(x)$

   c) En déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cost)^7 \, dt$

EXERCICE 10 :

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On pose pour tout entier $n > 0$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(k)$ et $I_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(t)\, dx$

1) a) Vérifier que f est décroissante.

   b) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

2) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $\frac{1}{1+n^2} \leq I_n \leq 1$

3) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 0$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dx \leq f(k)$

   b) Montrer alors que pour tout entier $n > 0$, $S_n - 1 \leq I_n \leq S_n - \frac{1}{1+n^2}$

   c) En déduire que pour tout entier $n > 0$, on a : $\frac{n+1}{n(1+n^2)} \leq S_n \leq 2$

   d) Dire alors pourquoi (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite L.