

Fonction logarithme népérien Géométrie dans l'espace

Séance 4

EXERCICE 1 :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_1^e (\ln x)^n \cdot dx$

- 1) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$
- 3) a) En tenant compte des questions 1)a) et 2), montrer que $\frac{e}{n+2} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$
 b) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 4) Soit la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 a) Montrer que $u_1 = 1$. En déduire u_2 et u_3 .
 b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de (O, \vec{i}) de la partie du plan limitée par (C), l'axe (O, \vec{i}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

EXERCICE 2 :

A/ Le tableau ci-contre représente les variations d'une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(a + b \cdot \ln x) \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels}).$$

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{e}{2}$	$-\infty$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On suppose que la courbe représentative (C) de f passe par le point $A(1, 1)$ et que la tangente T à (C) en ce point a pour équation : $y = x$

- 1) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
- 2) En déduire les valeurs de a et b .

B/ Dans la suite on prend : $\begin{cases} f(x) = x^2(1 - \ln x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$ pour tout $x > 0$

- 1) Calculer $f'_d(0)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique au $V(+\infty)$ qu'on précisera.
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et l'axe des abscisses.
- 4) a) Etablir le tableau de variation de la fonction $h : x \mapsto x - x \ln x - 1$
 b) En déduire alors la position de (C) par rapport à T.
- 5) Tracer la tangente T et la courbe (C).

EXERCICE 3 :

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = -x + \ln(x^2 + 1)$

- 1) a) Etablir le tableau de variation de la fonction f .
 b) En déduire que $\ln(x^2 + 1) \leq x$ pour tout réel $x \in [0, +\infty[$
- 2) Etudier la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
- 3) Tracer la courbe (C).

4) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1 + u_n^2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n > 0$
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- Prouver alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 4 :

- Comparer $\frac{1}{x}$ et 1 pour tout réel $x \geq 1$.
- En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, on a : $\ln x \leq x - 1$. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}$

EXERCICE 5 :

1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln x - x \ln x + x$

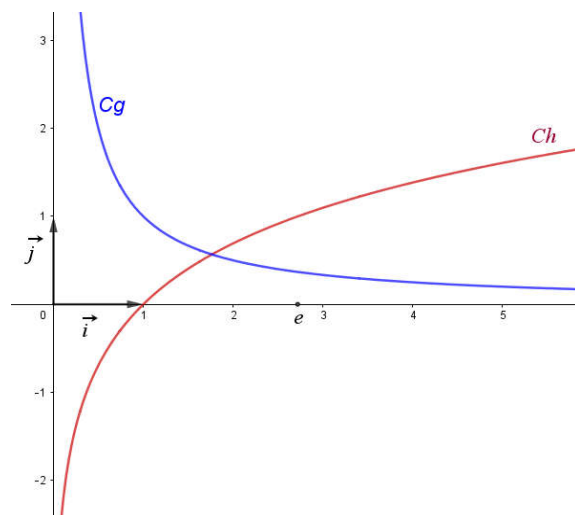
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

2) Dans la figure ci-contre C_g et C_h sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ et } h(x) = \ln x.$$

C_g et C_h se coupent en un point d'abscisse β .

- Par lecture graphique donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de $x > 0$.
En déduire le tableau de variation de f
 - Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$
- 3) On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- Etudier la position relative des courbes C_f et C_h .
 - Montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$
 - Placer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les points $A(\beta, 0)$ et $B(0, \frac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du sommet S de la courbe C_f
 - Tracer alors la courbe C_f .



EXERCICE 6 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit S_m l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 + (2m - 6)x + (2m + 4)y - 2z + 2m^2 - 8 = 0 \quad ; \quad (m \text{ est un paramètre réel})$$

- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m est une sphère et préciser dans ce cas les coordonnées de son centre I_m et son rayon R_m .
- Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans l'intervalle $]-\infty, \frac{21}{2}]$
- On considère la droite $\Delta : \begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = -2 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
Déterminer les deux sphères S_m qui sont tangentes à Δ .