Primitives et calcul d'intégrales

Séance 2

EXERCICE 1 :x

Déterminer une primitive de la fonction f sur I, dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto 3x^5 + x^2 - x + 1$; I=IR

2) $f : x \longmapsto x(1+x^2)^5$; I=IR

3) $f : x \longmapsto \sin x.(\cos x)^3$; I=IR

4) $f : x \longmapsto \sqrt{3x-6}$; I=$[2,+\infty[$

5) $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4-2x}}$; I=$]-\infty,2[$

6) $f : x \longmapsto \frac{2x-3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$; I=$]1,2[$

7) $f : x \longmapsto \frac{3x^2}{(1+x^3)^4}$; I=IR$\setminus\{-1\}$

8) $f : x \longmapsto \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$; I=$]1,+\infty[$

EXERCICE 2 :x

Soit les fonctions f et g définies respectivement sur$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par :

$f(x)=(x+1).\tan x$ et $g(x)=(x+1)\tan^2(x)+\tan x$.

1) Justifier l'existence des primitives de la fonction g sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

b) En déduire la primitive G de la fonction g sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ qui prend la valeur (-1) en $\frac{\pi}{4}$

EXERCICE 3 :x

Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1) a) Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive G de g sur IR qui s'annule en 0.

b) Soit $h : x \longmapsto G(x) + G(-x)$. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x. En déduire que G est une fonction impaire.

2) Soit $H(x) = G(\tan(x))$; $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$

a) Montrer que H est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et déterminer $H'(x)$ pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$.

b) En déduire que $H(x) = x$ pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$. Calculer $G(\frac{\sqrt{3}}{3})$

EXERCICE 4 :x

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$\int_0^1 (x^2+\frac{2}{x^2})dx$; $\int_2^3 dt$; $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $\int_1^2 \frac{t}{(t^2+1)^2}dt$; $\int_0^1 x(3x^2+2)^4 dx$;

$\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx$; $\int_1^4 (x+2)\sqrt{x}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,(\sin 2x)^4 dx$; $\int_0^{\pi} (\cos x)^3 dx$;

$\int_0^{\pi} (\cos x)^4 dx$; $\int_0^{\pi} x.\sin^2 x.dx$ et $\int_0^{\pi} x^2 \sin 2x.dx$

EXERCICE 5 :x

On considère les intégrales $I=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}dx$ et $J=\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx$

1) Calculer l'intégrale I

2) Calculer I+J. En déduire la valeur de J.

EXERCICE 6 :x

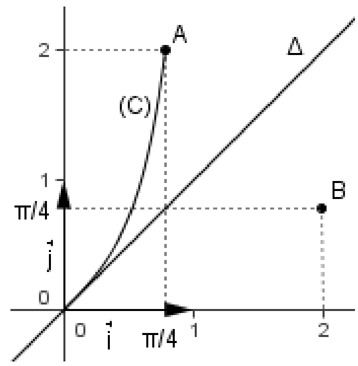
Soit la fonction $f : x \mapsto sinx - cosx$. On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) A l'aide du tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2) Calculer alors en $(u.a)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 7 :x

La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = (tanx)^3 + tanx$.

La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite $\Delta : y = x$.



1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$
2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) dont on précisera le domaine de définition J.
   b) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1}.
   c) Calculer $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$
3) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et le segment [AB].

EXERCICE 8 : x

On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n+2}x\ dx$

1) a) Calculer I_0.
   b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
2) Montrer que pour tout n, on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+3}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

EXERCICE 9 ☹

On pose pour tout $n \in$ IN, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$

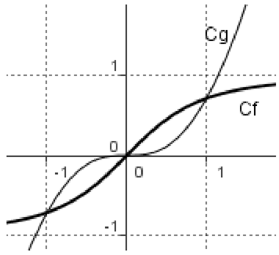
1) Calculer I_0

2) a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a :$0 \leq \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^{2n+1}$, En déduire que pour tout $n \in$ IN, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$
   b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2).\int_0^1 x^{2n+1}\sqrt{x^2+1}\,dx$$
   b) En déduire que $\forall\, n \in$ IN, on a : $(2n+3).I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2).I_n$
   c) Calculer alors I_1

4) Soient les fonctions f et g définies sur IR par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$

On a représenté ci-contre leurs courbes dans un repère orthonormé d'unité 2cm. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.



EXERCICE 10 :

Soit la fonction numérique F définie par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur IR.

c) Montrer que la fonction φ : x $\mapsto$ $F(x) + F(-x)$ est constante sur IR. En déduire que F est impaire.

2) On pose $g(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

b) Calculer $g(0)$. En déduire que $g(x) = x$

c) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

3) a) Vérifier que F est la réciproque de f (restriction de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$).

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

EXERCICE 11 ☹

Soit F la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{\tan^2 x} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

1) Montrer que F est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $F'(x) = 2$

2) Calculer $F(\frac{\pi}{4})$. En déduire que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$

3) a) Calculer alors I= $\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer J= $\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2} dt$

EXERCICE 12 ☹

On pose $g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$

1) Montrer que g est définie sur IR^+.

2) Montrer que g est dérivable sur IR^+ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in IR^+$.

3) a) Montrer que $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est décroissante sur IR^+.

b) En déduire que : $\frac{x}{\sqrt{1+8x^3}} \leq g(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ $\forall\ x \geq 0$.

4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

EXERCICE 13 :

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$

et on pose pour tout entier $n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

1) a) Vérifier que f est décroissante et positive.

b) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

2) a) Calculer $\int_1^n f(t)dt$; $n \geq 1$ et en déduire que $0 \leq \int_1^n f(t)dt \leq \frac{1}{2}$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (\int_1^n f(t)dt)$

3) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$\int_2^{n+1} f(t)dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt$

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}$

d) En déduire que la somme $(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3})$ converge et donner un encadrement de sa limite.

EXERCICE 14 :

On pose pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$

1) a) Vérifier que $I_2 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$

2) On considère les deux fonctions F et G définies sur IR par :

$F_n(x) = \int_0^{\sin x} (1 - t^2)^n dt$ et $G_n(x) = \int_0^x (\cos t)^{2n+1} \, dt$

a) Montrer que f et g sont dérivables sur IR et calculer $F_n'(x)$ et $G_n'(x)$ pour tout $x \in IR$

b) En déduire que pour tout réel x , on a : $F_n(x) = G_n(x)$

c) En déduire que la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^7 \, dt$