LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « 4ème Maths »	*Série d'exercices* *Les isométries - Les similitudes*

EXERCICE 1 : (QCM)

1) Soit I un point quelconque du plan, alors l'homothétie h(I,-3) est une :

a) similitude indirecte de rapport 3 **b)** similitude directe de rapport 3 et d'angle π **c)** similitude directe de rapport 3 et d'angle nul

2) Soit I et J deux points distincts du plan. L'application h(I,3)oh(J, $\frac{1}{3}$) est :

a) une translation **b)** une homothétie **c)** l'identité

3) Soit Ω un point quelconque du plan. L'application r(Ω , $\frac{\pi}{3}$)oh(Ω ,-3) est une similitude directe dont la forme réduite est :

a) r(Ω , $\frac{\pi}{3}$)oh(Ω ,3) **b)** r(Ω , $-\frac{\pi}{3}$)oh(Ω ,3) **c)** r(Ω ,- $\frac{2\pi}{3}$)oh(Ω ,3)

4) Soit f la similitude indirecte de centre I, de rapport 3 et d'axe Δ. L'application fof est :

a) la similitude indirecte de centre I, de rapport 9 d'axe Δ **b)** l'homothétie h(I , 9) **c)** la similitude directe S(I,9, π)

5) soit f la similitude indirecte dont la forme complexe est $z' = 2i\bar{z}$, alors une équation de son axe est :

a) $y = x + 1$ **b)** $y = -x$ **c)** $y = x$

6) L'image par une similitude de rapport $\frac{1}{2}$ d'un triangle d'aire $\mathcal{A}$ est un triangle dont l'aire est égale :

a) $\mathcal{A}$ **b)** $4.\mathcal{A}$ **c)** $\frac{1}{4}.\mathcal{A}$

EXERCICE 2 :

Le plan est orienté dans le sens direct. OAB est un triangle rectangle et isocèle tel que OA=OB et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I le milieu de [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
 b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC). Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de f.

3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoi A sur D.
 a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire g(O).
 b) Déterminer les images de C et D par g o f^{-1}. En déduire la nature de g o f^{-1}

4) Soit I'=f(I) et J'=g(J).
 a) Déterminer les images des points J et I' par g o f^{-1}.
 b) Montrer que les droites (IJ), (I'J') et (CD) sont concourantes.

EXERCICE 3 :

ABCD est un carré direct de centre O et de coté 2. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].

A/ 1) a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe f telle que f(D)=O et f(C)=I

b) Donner l'angle et le rapport de f. Construire le centre Ω de f.

2) a) Déterminer f((BD)) et f((BC)). En déduire f(B) et montrer que f(A)=J.

b) Caractériser f o f. En déduire que Ω est le barycentre des points pondérés (B,1) et (J,4).

3) Soit g la similitude indirecte telle que : g(D)=O et g(C)=I

a) Montrer que g= $S_{(OI)}$o f , puis déterminer g(B).

b) Donner la forme réduite de g.

B/ *Dans cette partie on garde seulement de la partie A/, les données suivantes : f et g sont des similitudes respectivement directe et indirecte qui transforment D en O et C en I.*

1) a) Vérifier que $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ est un repère orthonormé direct du plan.

b) Déterminer l'affixe de chacun des points C, D, O et I.

2) a) Déterminer l'expression complexe de f.

b) Retrouver le rapport et l'angle. Donner l'affixe du centre Ω de f.

3) a) Soit les points M(z) et M'(z'). Montrer que g(M)=M' si et seulement si $z' = -\frac{1}{2}i\bar{z} + 2 + i$

b) Retrouver les éléments caractéristiques de g.

EXERCICE 4 :

On considère dans le plan orienté P un triangle équilatéral ABC de sens direct. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] et D= S_C(A).

1) Soit f l'antidéplacement vérifiant f(C)=A et f(A)=B. Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

2) Soit g la similitude directe qui envoie B sur D et I sur C.

a) Montrer que g(A)=A puis caractériser g.

b) Justifier que f o g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

c) Déterminer f o g(I) et f o g(A).

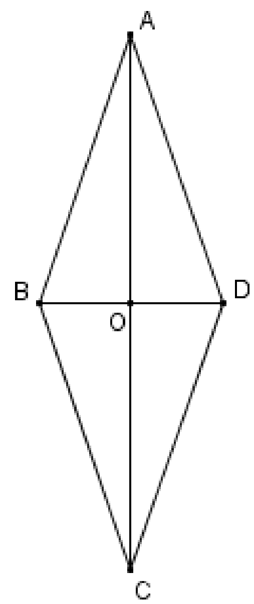
3) Soit Ω le point défini par : $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I} = \vec{0}$

a) Vérifier que $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$. Déduire que f o g($\Omega$)= Ω

b) Montrer que l'axe de la similitude f o g est la perpendiculaire en Ω à la droite (AB)

EXERCICE 5 : (Bac 2014)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AC=3BD.



1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Montrer que O est le centre de f.

2) a) Soit D' l'image de D par f. Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que OA=9OD'

b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que BB'DD' est un losange.

3) Soit g =f o $S_{(AC)}$

a) Déterminer la nature de g.

b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.

c) Déterminer l'axe Δ de g.

d) La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q. Montrer que MQ=3NP

EXERCICE 6 :

ABC est un triangle rectangle en A et de sens direct tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Soit A' le symétrique de A par rapport à C. On note S la similitude directe qui transforme A' en C et C en B.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Soit Ω le centre de S. Montrer que les droites (ΩC)et (BC) sont perpendiculaires. Construire Ω.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{u}, \vec{v})$, tel que B a pour affixe 1.

a) Calculer les affixes des points C et A'.

b) Déterminer la forme complexe de S.

c) En déduire l'affixe du point Ω

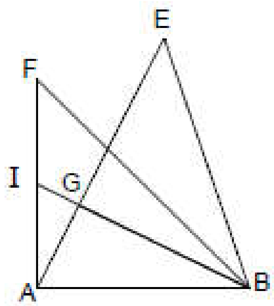
3) a) Préciser le rapport de la similitude indirecte f de centre C et qui transforme B en A.

b) Déterminer l'axe de f.

4) a) Soit g = f o S. Montrer que g est une symétrie glissante.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de g .

EXERCICE 7 : (Bac 2011)



Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

I est le milieu de [AF] . Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.

1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f.

2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Déterminer la nature de gog et préciser son rapport et son angle.

c) Montrer que $\tan(\widehat{ABI}) = \frac{1}{2}$. En déduire que GB = 2 GA.

d) En déduire que G est le centre de g.

3) Soit r = gof.

a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer r(E). En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

EXERCICE 8 : (Bac 2012)

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

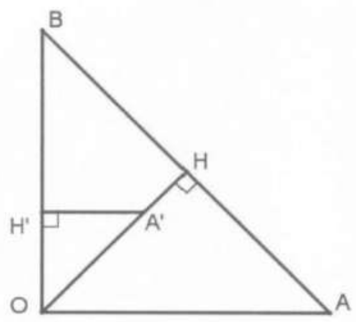
Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.
   b) En déduire S(C).
3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.
   b) En déduire que S(D) = K.
   c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C ,1) et (K , 4).
   d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que SoS(A) = E.
   e) Construire Ω.
4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

EXERCICE 9 :

Le plan est orienté.
Dans la figure ci-dessous, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.
H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que O A' = $\frac{1}{2}$ OA et H′ est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).
Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A′.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.
2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f .
   a) Déterminer la nature du triangle OA'B' .
   b) Construire le point B' .
   c) Montrer que f(H) = H'.
3) Soit I le milieu du segment [A'B] et J le milieu du segment [AA'].
   a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.
   b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.
   c) Soit K le milieu du segment [AB′]. Montrer que JK = OH' et que $(\widehat{\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
   d) Déterminer alors R(K).
   e) En déduire que IK = HH' et que (IK) et (H H') sont perpendiculaires.
4) Montrer que le quadrilatère IHKH' est un carré



EXERCICE 10 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre I et de sens direct. On désigne par J et K les milieux respectifs des côtés [AD] et [CD], soit E le point du plan tel que DBE soit un triangle équilatéral de sens direct

1/ On pose : $\Psi = t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(AC)}$

a) Déterminer Ψ (A) et Ψ (D).

b) En déduire que Ψ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

2/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoi B sur A et A sur D.

b) Caractériser R.

3/ On pose $g = R_{\left(B,\frac{\pi}{6}\right)} o R_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}$, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

4/ Soit $r = R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$ et on pose $t = g \text{ o } r^{-1}$.

a) Déterminer t(A) puis caractériser t.

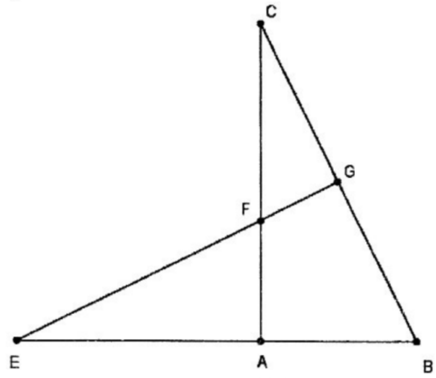
b) Pour tout M du plan P, on pose $M_1 = r(M)$ et $M_2 = g(M)$. Quelle est la nature du quadrilatère ABM_2M_1 ?

EXERCICE 11 : (Bac 2016)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle direct, rectangle en A et tel que $AB < AC$.

La médiatrice du segment $[BC]$ coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en E, F et G.



1) Soit f la similitude directe de centre A et telle que $f(B) = F$.

a) Déterminer l'angle de f.

b) Montrer que l'image de la droite (BC) par f est la droite (GF).

c) Déterminer $f(C)$.

2) Le cercle $\mathscr{C}_1$ de diamètre $[BC]$ et le cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[EF]$ se coupent en A et H.

a) Montrer que $f(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$.

b) Soit $I = f(H)$. Construire le point I.

c) Montrer que le quadrilatère HEIF est un rectangle.

d) La droite (FI) coupe la droite (AE) en un point J. Montrer que $f(F) = J$.

3) Soit g la similitude indirecte de centre A et telle que $g(B) = F$.

a) Montrer que $g = S_{(AC)} \text{ o } f$.

b) Soit $E' = f(E)$. Montrer que E' est un point de la droite (AC).

c) Soit $F' = g(F)$ et $H' = g(H)$. Construire l'image par g du rectangle FHEI.

EXERCICE 12 : (Bac 2015)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.

2) Soit g la similitude indirecte de centre A qui envoie C sur B.

a) Déterminer le rapport de g.

b) Déterminer l'axe Δ de g.

c) Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que g(B) = D et en déduire que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$

3) a) Montrer que fog est une symétrie axiale et préciser son axe .

b) On pose $D' = f(D)$. Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à A.

4) La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAD'}$ coupe la droite (CD') en un point J .

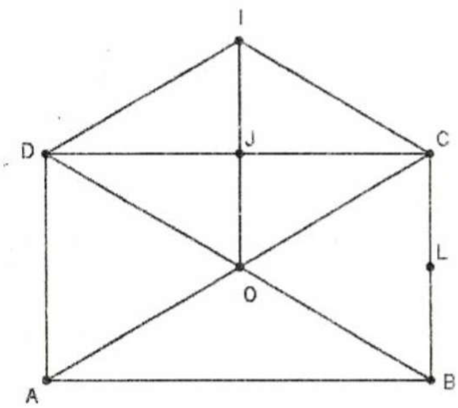
Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Déterminer $f(I)$.

EXERCICE 13 : (Bac 2016 contrôle)

Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle direct de centre O

AOID et OCID sont deux losanges. Le point J est le milieu du segment $[CD]$ et le point L est le milieu du segment $[BC]$.



1) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $R(O)$ et $R(D)$.

b) Montrer que $R(A) = B$.

2) Soit $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}$.

a) Vérifier que $g(A) = C$ et $g(D) = B$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) Soit h l'homothétie de centre le point C et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose $\varphi = R \circ h \circ g^{-1}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Soit K le milieu du segment $[IC]$. Montrer que $\varphi(B) = K$.

c) Montrer que $\varphi = h \circ S_{(AC)}$.

4) Déterminer l'image par φ du rectangle ABCD.