Dérivabilité et fonction réciproque

Séance 4

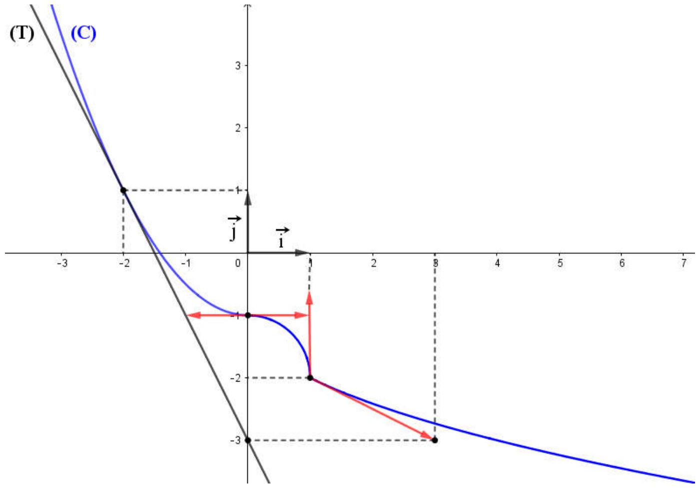
EXERCICE 1:

Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur IR et dérivable sur IR\{1}.

⁎ (T) est la tangente à (C) au point A(−2,1).

⁎ La courbe (C) admet une unique tangente horizontale.

⁎ La courbe (C) admet au v(−∞) une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ et au v(+∞) une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$.



1) a) Déterminer $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'_d(1)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)+2}{x-1}$

b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR.

3) a) Vérifier que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.

b) La fonction f^{-1} est elle dérivable en (-1) ? à gauche en (-2) ? (Justifier)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \frac{f^{-1}(x)-1}{x+2}$. Que peut-on en déduire ?

4) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f^{-1} sur IR.

5) Dresser le tableau de variation de la fonction f^{-1} et tracer sa courbe dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

EXERCICE 2:

1) Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en (-1). En déduire une interprétation géométrique.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur $]-\infty,-1]$.

2) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty,-1]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g^{-1} à droite en 0.

c) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$. Calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

d) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in$ J.

EXERCICE 3:

Soit la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $f(x)=\frac{1}{1+sinx}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J qu'on précisera.

3) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en $\frac{1}{2}$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]\frac{1}{2}\,,1]$.

4) a) Montrer que $\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x} - 1$ et que $\cos\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$

b) En déduire $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$ pour tout $x \in]\frac{1}{2}\,,1]$.

EXERCICE 4:

Soit la fonction f définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{tanx}} & si\ \ x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $f'(x) = -\frac{1+tan^2x}{2(\sqrt{tanx})^3}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{-2x}{1+x^4}$ pour tout $x > 0$

4) Soit la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

a) Montrer que la fonction h est constante sur $]0,+\infty[$.

b) En déduire que pour tout $x > 0$, on a : $f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\pi}{2}$