Dérivabilité et fonction réciproque

EXERCICE 1:

On considère la fonction f définie sur $]-1,1]$ par $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. En déduire une interprétation géométrique.
2) a) Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x)=\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$
   b) En déduire que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1})définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
   c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in$ J.
3) On pose $g(x)=f(tan^2x)$ pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right]$.
   a) Vérifier que $(x)=\sqrt{cos2x}$ $\forall\, x \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right]$.
   b) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle K qu'on précisera.
   c) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $(g^{-1})'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$

EXERCICE 2:

Soit la fonction f: $\left[0,\frac{1}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x)=tan(\pi x)$

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$.
   b) Montrer que l'équation $tan(\pi x)=\pi$, possède une solution α unique dans $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.
   c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que: $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$
   d) La fonction f^{-1} est elle dérivable à droite en 0 ? Justifier .
2) On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x)=f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & si\ \ x>0 \\ g(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$
   b) Montrer que g est continue à droite en 0. Montrer que g est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
   c) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $g'(x)=\frac{-1}{\pi(1+x^2)}$ $si\ \ x>0$
3) Soit la fonction h définie par : $h(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$
   a) Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
   b) Calculer $h(1)$. En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f^{-1}(x)+f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$

EXERCICE 3:

On considère la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=-x+\tan x$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$.

2) Montrer que pour tout n∈IN, l'équation : $-x+\tan x=n$ admet une unique solution α_n dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

3) a/ Montrer que la suite (α_n) est croissante.

b/ En déduire que la suite (α_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 4:

Soit la fonction f définie sur $[1\,,+\infty[$ *par* $f(x) = \sqrt{x^2-1}+x$

1. / a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. / Dresser le tableau de variation de f.

3. / a. Montrer que f réalise une bijection de $[1\,,+\infty[$ *sur un intervalle J à préciser.*

b. Calculer $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$.

4. / On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives de f et de f^{-1} *dans un repere orthonormé* $(O,\vec{u},\vec{v})$

a. Montrer que la droite d'équation y = 2x est une asymptote oblique à (C).

b. Construire les courbes (C) et (C')

5. / Soit la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ *par* $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

a. Montrer que pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$ *on a* $g(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

b. Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ *sur un intervalle K à préciser*

c. Montrer que : $\left[\; g(y) = x \;\; , y\in[0,\frac{\pi}{2}[\quad \Leftrightarrow \quad \cos y = \frac{2x}{1+x^2}, x \in [1\,,+\infty[\;\right]$

d. Montrer que g^{-1} *est dérivable sur K et pour tout* $x \in K$ *on a :* $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{x^2+1}$

6. / On pose $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} g^{-1}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*$

a. Montrer que pour tout $n\in \mathbb{N}^*$ *on a :* $g^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \le u_n \le g^{-1}\left(1+\frac{2}{n}\right)$

b. En déduire que (u_n) *est convergente et donner sa limite.*