Divisibilité dans $\mathbb{Z}$-Identité de Bezout

Séance 4

EXERCICE 1:

On considère le système de congruences (S) : $\begin{cases} n \equiv 2(mod3) \\ n \equiv 1(mod5) \end{cases}$ où n est un entier relatif.

1) Montrer que 11 est une solution de (S).

2) Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.

3) Montrer que les solutions de (S) sont de la forme 11+15k où $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2: (Extrait du Bac blanc 2017)

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $1436x - 2015y = 1$
   a) Montrer que l'ensemble de solutions de l'équation (E) sont les couples $(2015k - 964\,, 1436k - 687)$, $k \in \mathbb{Z}$
   b) Déterminer le plus petit inverse positif u de 1436 modulo 2015.
2) Soit n un entier naturel vérifiant $n^{1439} \equiv 1436(mod\ 2015)$
   a) Soit d un diviseur commun de n et 2015. Montrer que d divise 1436.
   b) En déduire que n et 2015 sont premiers entre eux.
3) a) En utilisant le théorème de Fermat, prouver que $n^{1440} - 1$ est divisible par chacun des entiers 5, 13 et 31
   b) En déduire que $n^{1440} \equiv 1(mod\ 2015)$
   c) Montrer alors que 1051 est le reste de la division euclidienne de n par 2015.

EXERCICE 3: (Bac Maths 2015)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $47x + 53y = 1$.
   a) Vérifier que $(-9{,}8)$ est une solution de (E).
   b) Résoudre alors l'équation (E).
   c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.
   d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.
2) a) Justifier que $45^{52} \equiv 1(mod\ 53)$
   b) Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53.
3) Soit N= $1 + 45 + 45^2 + \cdots + 45^{105} = \sum_{k=0}^{105} 45^k$
   a) Montrer que 44N$\equiv 10(mod\ 53)$
   b) En déduire le reste de N modulo 53.

EXERCICE 4:

I/ 1) Déterminer les restes de la division euclidienne de 4^n par 9 suivant les valeurs de l'entier naturel n.
2) Soit l'entier A= $(3n - 1)4^n + 1$; $n \in IN$
   a) Vérifier que pour tout $n = 3q$ où $q \in IN$, le nombre A est divisible par 9.
   b) Montrer que pour tout $n \in IN$, le nombre A est divisible par 9.

II/ 1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $8x + 5y = 1$.

a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre alors l'équation (E).

2) Soit N un entier tel que $\begin{cases} N \equiv 1(mod 8) \\ N \equiv 2(mod 5) \end{cases}$

Montrer que $N \equiv 17(mod\ 40)$

3) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E') : $8x + 25y = 5$.

a) Montrer que si (x, y) est une solution de (E') alors $x \equiv 0(mod\ 5)$

b) Résoudre alors l'équation (E').

4) Soit $d = x \wedge y$ où (x, y) est une solution de l'équation (E').

a) Déterminer les valeurs possibles de d.

b) Déterminer l'ensemble de solutions de l'équation (E') telles que $d = 5$.

EXERCICE 5:

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes :

a) $4x + 1 \equiv 0(mod\ 11)$

b) $x^2 + x - 1 \equiv 0(mod\ 4)$

c) $(x + 1)(x - 3) \equiv 0(mod\ 7)$

d) $(x + 1)(x - 3) \equiv 0(mod\ 21)$

EXERCICE 6:

En utilisant le théorème de Fermat, montrer que pour tout entier premier $p \geq 11$, on a :

a) $(p^3 - 1)(p^3 + 1)$ est divisible par 7.

b) $p^8 - 1$ est divisible par 5.

c) $p^{12} \equiv 1(mod 21)$

EXERCICE 7: (Bac Maths 2017)

1) Soit x un entier non nul premier avec 53.

a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}.

b) En déduire que pour tout entier naturel k, $x^{52k+1} \equiv x(mod 53)$

2) Soit l'équation (E_1) : $x^{29} \equiv 2(mod 53)$ où $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que 2^9 est une solution de (E_1)

3) Soit x une solution de (E_1).

a) Montrer que x est premier avec 53.

b) Montrer que $x^{261} \equiv x(mod 53)$

c) En déduire que $x \equiv 2^9\ (mod 53)$

4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35(mod 53)$

b) Donner alors l'ensemble de solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

5) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $71u - 53v = 1$

a) Vérifier que (3,4) est une solution de l'équation (E_2)

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

6) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} x \equiv 34(mod 71) \\ x^{29} \equiv 2(mod 53) \end{cases}$

EXERCICE 8: (Bac Maths 2014)

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10)$.
   a) Montrer que $a^9 + a^8 + \cdots + a + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 10)$
   b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10)$
      (On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + \cdots + a + 1)$).
2) Soit b un entier.
   a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.
   b) En déduire que $b^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10)$ si et seulement si b est premier avec 10.
3) Soit b un entier premier avec 10.
   a) Montrer que $b^{40} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10^2)$
   b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}.

EXERCICE 9:

1) Comparer $\frac{1}{x}$ et 1 pour tout réel $x \geq 1$.
2) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, on a : $lnx \leq x - 1$.
3) Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}$

EXERCICE 10:

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = -x + ln\,(x^2 + 1)$
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Etablir le tableau de variation de la fonction f.
   b) En déduire que $ln\,(x^2 + 1) \leq x$ pour tout réel $x \in [0, +\infty[$
2) Etudier la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
3) Tracer la courbe (C).
4) Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} ln(1 + {u_n}^2) \ \forall\, n \in IN \end{cases}$
   a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $u_n > 0$
   b) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$
   c) En déduire que pour tout $n \in IN$, on a : $u_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   d) Prouver alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 11:

1) a) Montrer que la fonction tan admet une fonction réciproque g définie sur IR.
   b) Montrer que g est dérivable sur IR et que $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in IR$.
2) Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{lnt}{1+t^2} dt$
   a) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F(x) = 0$
   b) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
      $F(x) = \left[g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)\right].lnx - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{g(t)}{t} dt$
3) Montrer que pour tout $x > 0$, $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
4) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $\int_{\frac{1}{\sqrt[n]{e}}}^{\sqrt[n]{e}} \frac{g(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2n}$. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_{\frac{1}{\sqrt[n]{e}}}^{\sqrt[n]{e}} \frac{g(t)}{t} dt\right)$

EXERCICE 12:

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{xlnx}{x-1} \ \ si \ \ x \neq 0 \ \ et \ \ x \neq 1 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2) Soit $x \in]0,+\infty[\backslash\{1\}$ et φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :
   $\varphi(t) = \frac{xlnx - x + 1}{(x-1)^2}(t-1)^2 - t.lnt - 1 + t$
   a) Calculer $\varphi(x)$ et $\varphi(1)$. Montrer qu'il existe un réel c compris entre 1 et x tel que $\varphi'(c) = 0$
   b) En déduire que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \frac{1}{2}$
   c) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
3) a) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 + 2xlnx$
   Dresser le tableau de variation de la fonction g' puis celui de la fonction g et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
   b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer la courbe (C).

EXERCICE 13: (Extrait d'un devoir de synthèse)

A tout entier naturel non nul n , on associe la fonction f_n définie sur $[1,+\infty[$ *par* $f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(lnx)^n}{x^2}$

1)a)Etudier les variations de f_1

b)Tracer sa courbe C_1

2)a)Montrer que f_n est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que $(f_n)'(x) = \frac{1}{n!}\frac{(lnx)^{n-1}(n-2lnx)}{x^3}$

b)Dresser le tableau de variation de f_n et vérifier que son maximum est $y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

3)a)Calculer pour tout $x > 1$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

b)Montrer que $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_n \leq \frac{1}{2} y_n$

c)En déduire que $y_{n+1} \leq \frac{1}{e2^n}$ déduire la limite de (y_n)

4)Soit $I_n = \int_1^e f_n(t)dt$ pour tout $n \in IN*$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

a)Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

b)Montrer que $0 \leq I_n \leq (e-1)\, y_n$ et déduire la limite de (I_n)

c)Montrer que pour tout $n > 0$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!\, e}$

d)Montrer que $I_n = I_1 + \frac{2}{e} - S_n$ et déduire la limite de (S_n)