Divisibilité dans $\mathbb{Z}$-Identité de Bezout

Séance 3

EXERCICE 1:

Répondre par vrai ou faux, en justifiant votre réponse :

1) Pour tout entier naturel n non nul, on a : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 »
2) Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et $4n + 3$ est égal à 7.
3) Soit x un entier. Alors on a : « $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$ si et seulement si $x \equiv 1[5]$ »
4) Le reste de la division euclidienne de $10^{85} + 1$ par 9 est 5.
5) Le quotient de la division euclidienne de (-1165) par (-14) est égal à 83.
6) Soit n un entier. Alors les nombres $2n + 3$ et $5n + 7$ sont premiers entre eux.
7) Pour tout entier naturel n, le nombre $8^{2n} - 1$ est divisible par 7.
8) Soit x un entier tel que : $\begin{cases} x \equiv 3(\text{mod } 4) \\ x \equiv 4(\text{mod } 5) \end{cases}$ alors $x \equiv 19(\text{mod } 20)$

EXERCICE 2:

Pour tout entier n, on pose $a = 2n + 5$ et $b = n - 3$.

1) Montrer que tout diviseur commun de a et b est un diviseur de 11.
2) En déduire, suivant les valeurs de n, la valeur de $a \wedge b$.
3) En déduire que $a = 2 \times 12^{3120} + 5$ et $b = 12^{3120} - 3$ sont premiers entre eux.

EXERCICE 3:

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste modulo 13 de l'entier 5^p.
2) En déduire que $\forall\, n \in \mathrm{IN}^*$, le nombre N= $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13

EXERCICE 4:

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 5.
2) On pose $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$; $n \in IN$. Déterminer suivant les valeurs de n les restes de A_n modulo 5.
3) Résoudre dans IN l'équation $A_n \equiv 3(\text{mod } 5)$.
4) Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier N= $1253^{2014} \times 13^{2015}$.

EXERCICE 5:

Soit n un entier naturel, on considère les entiers p= n+5 et q=2n+3 et on note d = PGCD (p,q)

1) a) Calculer 2p – q. En déduire les valeurs possibles de d.
   b) Montrer que si p est un multiple de 7 alors q est un multiple de 7.
   c) Montrer que p est un multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.
2) Montrer que d = 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.
3) Application : Déterminer d dans chacun des cas suivants,
   a) $n = 6^{2014} + 7^{2015}$.
   b) $n = 6^{2014} + 8^{2015}$.

EXERCICE 6: (Vrai ou Faux)

1) le quotient de (-23) par (-5) est 4.
2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.
3) $147^{146} \equiv 2(\mathrm{mod}\ 12)$
4) $x^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 8)$ équivaut à $x \equiv 0(\mathrm{mod}\ 8)$
5) Si $\begin{cases} x \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4) \\ x \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5) \end{cases}$ alors $x \equiv 19(\mathrm{mod}\ 20)$

6) Soit n un entier. Alors les nombres $2n + 3$ et $5n + 7$ sont premiers entre eux.

7) Si le couple (x, y) est une solution entière de l'équation $7x + 17y = 34$ alors $x \equiv 0[17]$

EXERCICE 7: (Extrait du Bac blanc 2017)

1) Soit, dans Z×Z, l'équation (E) : $1436x - 2015y = 1$.
   a) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) sont les couples $(2015k - 964, 1436k - 687)$, $k \in$ Z.
   b) Déterminer le plus petit inverse positif u de 1436 modulo 2015.
2) Soit n un entier naturel vérifiant $n^{1439} \equiv 1436\ (\mathrm{mod}\ 2015)$.
   a) Soit d un diviseur commun de n et 2015. Montrer que d divise 1436.
   b) En déduire que n et 2015 sont premiers entre eux.
3) a) En utilisant le théorème de Fermat, Prouver que $n^{1440} - 1$ est divisible par chacun des entiers 5, 13 et 31.
   b) En déduire que $n^{1440} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2015)$.
   c) Montrer, alors que 1051 est le reste de la division euclidienne de n par 2015.

EXERCICE 8: (Bac Maths 2015)

1) On considère dans Z×Z l'équation (E) : $47x + 53y = 1$.
   a) Vérifier que $(-9, 8)$ est une solution de (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
   c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.
   d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.
2) a) Justifier que $45^{52} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 53)$.
   b) Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53.
3) Soit $N = 1 + 45 + 45^2 + \ldots + 45^{105} = \sum_{k=0}^{k=105} 45^k$.
   a) Montrer que $44\,N \equiv 10\ (\mathrm{mod}\ 53)$.
   b) En déduire le reste de N modulo 53.

EXERCICE 9:

On considère le système de congruences (S) : $\begin{cases} n \equiv 2(mod3) \\ n \equiv 1(mod5) \end{cases}$ où n est un entier relatif.

1) Montrer que 11 est une solution de (S).

2) Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.

3) Montrer que les solutions de (S) sont de la forme $11 + 15k$ où $k \in \mathbb{Z}$.