Bon courage

Exercice 1

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $h(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.

   a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, on a :
   $$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$
   où h' désigne la fonction dérivée de h.

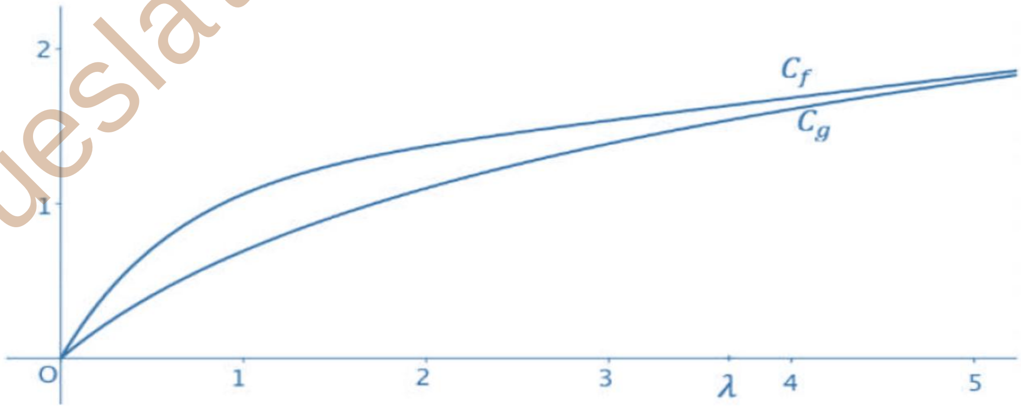
   b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

   c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x+1).$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.



1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et N le point de coordonnées $(x; g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes C_f et C_g.

   a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

b)placer sur le graphique les deux points M et N correspondant à la valeur maximale de MN

2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

   a. Hachurer le domaine D_λ correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe

page 1

   b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}.$$

   c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

Exercice 2

Exercice comportant une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 5 cm).

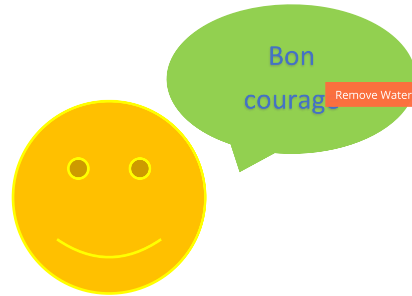
Partie 1

1. Démontrer que la droite (δ) d'équation y = 1 est asymptote à (C).

2. Pour $x > 0$, calculer $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.
Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0 (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\lim\limits_{u \to +\infty} u^n e^{-u} = 0$)
Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

3. Démontrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a :
$f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

4. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.



Partie 2

On note g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1. Montrer que, dans $]0\,;+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^3 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.

2. Démontrer que l'équation $x^3 + x^3 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.

3. On pose $\mathrm{A} = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$.Encadrer A à $2{\times}10^{-1}$ près (justifier) et montrer que $\mathrm{A} = f'(\alpha)$.

4. Pour tout $a > 0$, on note (T_a) la tangente à (C) au point d'abscisse a.Montrer que (T_α) a pour équation $y = \mathrm{A}x$. Tracer (T_α), puis la courbe (C).

5. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes (T_a) à (C) (en des points d'abscisses non nulles), seule (T_α) passe par l'origine O.

Partie 3

1. Pour $n \in \mathbb{N}*$, on pose $\mathrm{u_n} = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Sans calculer explicitement u_n, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.
En déduire que la suite (u_n) est croissante.

2. Démontrer que la fonction h, définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$, est primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Calculer u_n. Interpréter graphiquement le résultat.

4. Étudier la convergence de la suite (u_n).