Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $12x\equiv5\ [35]$

Correction

$12x\equiv5\ [35] \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, 12x=5+35k \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, 12x-35k=5$
$35=2\times12+11$, $12=1\times11+1$ et $11=1\times11+0$
Donc $1=12-1\times11=12-1\times(35-2\times11)=-1\times35+3\times12$
Donc $3\times12\equiv1\ [35]$ $12x\equiv5\ [35] \Rightarrow 3\times12x\equiv3\times5\ [35] \Rightarrow x\equiv15\ [35]$
Réciproque $12\times15=180=5\times35+5\equiv5\ [35]$
L'ensemble des solutions est $S=\{15+35k, k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 2

1. Trouver une solution particulière de $13u+5v=3$
2. Déterminer tous les couples d'entiers $(u,v)\in Z^2$ tels que $13u+5v=3$.
3. Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^{2013} par 5 et par 13. **Théorème de Fermat** ☺

Correction

1. On voit que $13\times2-5\times5=1$, en multipliant par 3 on trouve que
$$13\times6-5\times15=3$$
donc $(6,-15)$ est une solution particulière.

2.
$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 13u+5v=1 \\ 13\times6-5\times15=1 \end{cases}$$
L_1-L_2 donne $13(u-6)+5(v+15)=0$
Ce qui équivaut à

$$13(u-6)=-5(v+15)$$

13 divise $-5(v+15)$ et 13 est premier avec 5, d'après le théorème de Gauss, 13 divise $-(v+15)$, il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que

$$-(v+15)=13k \Leftrightarrow v=-15-13k$$

On remplace $-(v+15)=13k$ dans $13(u-6)=-5(v+15)$, on obtient

$$13(u-6)=5\times 13k \Leftrightarrow u=6+5k$$

La réciproque est évidente, donc l'ensemble des couples (u,v) vérifiant $13u+5v=3$ est

$$\{(6+5k,-15-13k),k\in\mathbb{Z}\}$$

Comme 5 premier, d'après le théorème de Fermat

$$2^4\equiv 1\,[5]$$

La division euclidienne de 2013 par 4 est $2013=4\times 503+1$, donc

$$2^{2013}=2^{4\times 503+1}=(2^4)^{503}\times 2\equiv 1^{503}\times 2\,[5]\equiv 2\,[5]$$

$0\leq 2<5$ donc 2 est le reste de la division euclidienne de 2^{2013} par 5

Comme 13 premier, d'après le théorème de Fermat

$$2^{12}\equiv 1\,[13]$$

La division euclidienne de 2013 par 12 est $2013=12\times 167+9$, donc

$$2^{2013}=2^{12\times 167+9}=(2^{12})^{167}\times 2^9\equiv 1^{167}\times 2^9\,[13]\equiv 2^4\times 2^4\times 2\,[13]\equiv 16\times 16\times 2\,[13]$$
$$\equiv 3\times 3\times 2\,[13]\equiv 18\,[13]\equiv 5\,[13]$$

$0\leq 5<13$ donc 5 est le reste de la division euclidienne de 2^{2013} par 13

3 Exercice 3

Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation :

$$7x+5y=3$$

Correction ☺

$$7=1\times 5+2$$
$$5=2\times 2+1$$
$$2=2\times 1+0$$

Donc $1=5-2\times 2=5-2\times(7-1\times 5)=-2\times 7+3\times 5$

On multiplie cette égalité par 3 : $-6\times 7+9\times 5=3$. On soustrayant $7x+5y=3$ et $-6\times 7+9\times 5=3$ on trouve que : $7(x+6)+5(y-9)=0$, ce qui équivaut à $7(x+6)=-5(y-9)$, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $5(y-9)$ et $7\wedge 5=1$ donc 7 divise $y-9$, il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que :
$y-9=7k$, ce que je remplace dans $7(x+6)=-5(y-9)$ ce qui donne $7(x+6)=-5\times 7k$, puis en simplifiant par 7 : $x+6=-5k$.

L'ensemble des solution est $\mathcal{S}=\{(-6-5k,9+7k),k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 4

Congruences

On se propose de déterminer tous les couples $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ solutions de l'équation : $2^m - 3^n = 1$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
   b) Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8, puis de $3^{2k+1} + 1$ par 8
2. Soit $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ un couple de solution, montrer à l'aide de 1°) que $m \leq 2$.
3. En déduire tous les couples $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ d'entier naturels solutions de l'équation.

Correction ☺

1.
a) $9^k \equiv 1^k \ [8] \equiv 1 \ [8]$, comme $0 \leq 1 < 8$, le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 est 1.
b) $3^{2k} + 1 \equiv 9^k + 1 \ [8] \equiv 2 \ [8]$, de même le reste de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8 est 2.
$3^{2k+1} + 1 = 3 \times 9^k + 1 \equiv 3 \times 1 + 1 \ [8] \equiv 4 \ [8]$, le reste est alors 4.

2. Si $n = 2k$

$$2^m - 3^n = 1 \Rightarrow 2^m - 3^{2k} \equiv 1 \ [8] \Rightarrow 2^m - (3^2)^k \equiv 1 \ [8] \Rightarrow 2^m - (9)^k \equiv 1 \ [8] \Rightarrow 2^m - (1)^k \equiv 1 \ [8]$$
$$\Rightarrow 2^m \equiv 2 \ [8] \Rightarrow 2^m = 2 + 8l$$

avec $l \in \mathbb{N}$ donc $2^{m-1} = 1 + 4l$ or si $m \geq 2$, 2^{m-1} est paire et $1 + 4l$ est impaire, on en déduit que si $n = 2k$ alors $m < 2$,

Si $n = 2k + 1$

$$2^m - 3^n = 1 \Rightarrow 2^m - 3^{2k+1} \equiv 1 \ [8] \Rightarrow 2^m - 3 \times (3^2)^k \equiv 1 \ [8] \Rightarrow 2^m - 3 \times (9)^k \equiv 1 \ [8]$$
$$\Rightarrow 2^m - 3 \times (1)^k \equiv 1 \ [8] \Rightarrow 2^m \equiv 4 \ [8] \Rightarrow 2^m = 4 + 8l \Rightarrow 2^{m-2} = 1 + 2l$$

avec $l \in \mathbb{N}$ donc $2^{m-2} = 1 + 2l$ or si $m \geq 3$, 2^{m-2} est paire et $1 + 2l$ est impaire, on en déduit que si $n = 2k + 1$ alors $m < 3$.

Que n soit pair ou impair $m \leq 2$

3. Il n'y a que trois cas possibles $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$.
Si $m = 0$ alors $2^m - 3^n = 1 \Leftrightarrow 1 - 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 0$ ce qui est impossible.
Si $m = 1$ alors $2^m - 3^n = 1 \Leftrightarrow 2 - 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 1 \Leftrightarrow n = 0$
Si $m = 2$ alors $2^m - 3^n = 1 \Leftrightarrow 4 - 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 3 \Leftrightarrow n = 1$
L'ensemble des solutions est :

$$S = \{(1,0), (2,1)\}$$

Exercice 5

1. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne du carré d'un nombre impair par 8.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair. En déduire que l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

N'a pas de solution pour x, y et z impairs.

Corr ection ☺

1.

$$1^2 = 1 \equiv 1 \ [8]$$
$$3^2 = 9 \equiv 1 \ [8]$$
$$5^2 = 25 \equiv 1 \ [8]$$
$$7^2 = 49 \equiv 1 \ [8]$$

$0 \leq 1 < 8$ donc le reste de la division euclidienne du carré d'un nombre impair par 8 est 1.

2. $n = 2m, m \in \mathbb{N}^*$

$$x^n + y^n = (x^2)^m + (y^2)^m \equiv 1^m + 1^m \ [8] \equiv 2 \ [8]$$
$$z^n = (z^2)^m \equiv 1^m \ [8] \equiv 1 \ [8]$$

Donc l'équation n'a pas de solution.

6 Exercice 6 — Théorème de Fermat ☺

Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{1000} par 7.

Corr ection ☺

D'après le petit théorème de Fermat $5^6 \equiv 1 \ [7]$ car 7 est premier et 5 est premier avec 7.

$$1000 = 166 \times 6 + 4$$

Donc

$$5^{1000} = 5^{6\times166+4} = (5^6)^{166} \times 5^4 \equiv 1^{166} \times 5^4 \ [7] \equiv 5^2 \times 5^2 \ [7] \equiv 25 \times 25 \ [7] \equiv 4 \times 4 \ [7]$$
$$\equiv 16 \ [7] \equiv 2 \ [7]$$

Comme $0 \leq 2 < 7$, 2 est le reste de la division euclidienne de 5^{1000} par 7.