## EXERCICE N1 :

On considère la suite réelle $(u_n)$ définie sur IN par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+{u_n}^2}$

1) a) Montrer que pour tout n∈IN on a : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$

b) Etudier la monotonie de $(u_n)$. En déduire qu'elle converge puis calculer sa limite L.

2) a) Montrer que pour tout n∈IN on a : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n)$

b) A l'aide de raisonnement par récurrence, déduire que pour tout n∈IN, on a :

$0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) Pour tout n∈ IN*, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ , $v_n = \frac{S_n}{n}$ et $w_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

a) Montrer que pour tout n∈ IN*, on a : $n - \frac{1}{3}[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n] \leq S_n < n$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$

## EXERCICE N2 :

Soit la suite $(u_n)$ définie sur IN par : $u_0=1$ , $u_1=1$ et $u_{n+1} = u_n + 6.u_{n-1}$ pour tout n ∈ IN*.

1) Calculer $u_2$ et $u_3$.

2) Soit $(v_n)$ la suite définie sur IN* par : $v_n = u_n + 2.u_{n-1}$

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 3 et en déduire $v_n$ en fonction de n.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout n∈ IN, on a : $u_n = \frac{3^{n+1}}{5}\left[1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right]$

3) Soit $(W_n)$ la suite définie sur IN* par : $W_n = u_n - 3.u_{n-1}$.

Montrer que $(W_n)$ est une suite géométrique de raison $(-2)$ et en déduire $W_n$ en fonction de n.

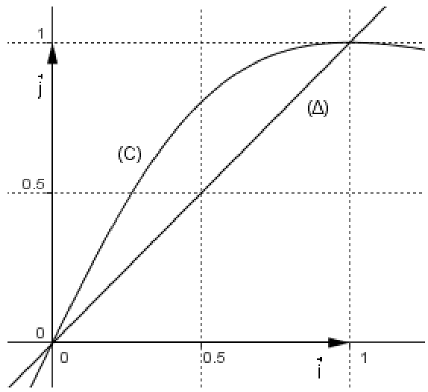
4) a) Montrer que $u_n = a.v_{n+1} + b.W_{n+1}$ avec a et b deux réels qu'on précisera.

b) En déduire la somme $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

## EXERCICE N3 :

Soit la fonction $f$ définie sur IR par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

Dans le graphique ci-contre on a tracé une partie de la courbe (C) de f et la droite Δ : y=x. Soit la suite réelle $(u_n)$ définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$




1) Indiquer sur l'axe des abscisses $(O,\vec{\imath})$ les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$ sans les calculer.

Que peut-on conjecturer à propos de la monotonie de la suite $(u_n)$ et de sa convergence.

2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$

b) Etudier le signe de f(x)-x suivant les valeurs de x dans [0,1].

3) En déduire que : a) $0 < u_n < 1$ pour tout $n$ ∈IN.

b) La suite $(u_n)$ est croissante

4) Montrer alors que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite L

## EXERCICE N4 :

Soit $(a_n)$ une suite réelle définie sur IN par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n^2}}$

1) a) Montrer que pour tout n ∈IN, on a : $0 < a_n \leq 1$

b) Etudier la monotonie de $(a_n)$, puis déduire qu'elle converge et calculer sa limite L.

2) a) Vérifier que pour tout x∈ $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\frac{\tan x}{1+\sqrt{1+(\tan x)^2}} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

b) Montrer que pour tout n ∈IN, on a : $a_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$. Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

3) Pour tout n∈ IN, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ , $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

a) Calculer : $u_0$ et $v_0$

b) Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes vers la même limite L.

c) Montrer que $2-\sqrt{2} \leq L \leq 1$

## EXERCICE N5 :

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $IN^*$ par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

1) Montrer que suite $(u_n)$ est croissante

2) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $u_n \geq \sqrt{n}$ . En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## EXERCICE N6 :

On considère la suite $(u_n)$ définie sur IN par : $u_n = \frac{n!}{3^n}$

1) a) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{4}{3}$ pour tout entier naturel $n \geq 3$

b) En déduire que pour tout entier naturel ≥ 3 , on a : $u_n \geq (\frac{4}{3})^{n-3} u_3$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2) On pose $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{3^k}{k!}$

Montrer que pour tout n≥3, on a : $S_n \leq \frac{1}{u_3} \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{3}{4}\right)^k$. En déduire que pour tout n≥3, on a : $S_n \leq \frac{4}{u_3}$

## EXERCICE N7:

Soit $(u_n)$ la suite réelle définie sur IN* par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

1) a) Calculer : $u_2$ , $u_3$ et $u_4$.

b) Montrer que, pour tout n ∈ IN*, on a : $u_n = 2 - 4.\sin^2 \frac{\pi}{2^n}$

c) En déduire la valeur de $\sin \frac{\pi}{8}$

2) a) Montrer que pour tout n ∈ IN*, on a : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$

b) En déduire que : pour tout n ∈ IN*, on a : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## EXERCICE N8:

Soit $(u_n)$ la suite réelle définie par : $u_0=1$ ; $u_1=2$ et $u_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}u_n$ ∀ n ∈ IN.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{1}{2^{2n}}$

2) Soit la suite $(v_n)$ définie sur IN par : $v_n = (n+1)u_n.u_{n+1}$

Montrer que $(v_n)$ est une suite constante et calculer cette constante.

3) Exprimer alors $u_{2n+1}$ en fonction de n.

## EXERCICE N9:

On considère les suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$u_0 = 12$ , $v_0 = 1$ , $u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$ ; $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq v_n$
3) Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers la même limite $\ell$.
4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3u_n + 8v_n$
   Montrer que $(t_n)$ est une suite constante. En déduire la valeur de $\ell$.

## EXERCICE N10:(QCM)

**1)** Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$par : $u_n = \frac{(-1)^n.\ sin(n)}{n}$ alors :

**a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

**2)** Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n}-1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n}$ alors :

**a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

**3)** Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$par : $u_n = n.sin(\frac{2\pi}{n})$. Alors :

**a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\pi$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

4) On désigne par $(u_n)$ la suite définie par $u_n = \frac{1-(-1)^n}{2n+(-1)^n}$, $n \geq 1$.

**a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

## EXERCICE N11:

On considère les suites $U$ et $V$ définies sur $IN$ par :

$U_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$ $V_n = \frac{2}{U_n}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$.

1) Calculer : $V_0$ , $U_1$ , $V_1$ , $U_2$ et $V_2$ .
2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in IN$, on a : $\begin{cases} 1 \leq U_n \leq 2 \\ \quad et \\ 1 \leq V_n \leq 2 \end{cases}$
3) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)}$ . [1] (On pourra remarquer que : $U_n.V_n = 2$).
4) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n > V_n$ .
5) Montrer que $U$ est décroissante et que $V$ est croissante.
6) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \leq 1$.
   En déduire que $(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$. [2]
7) En utilisant les relations [1] et [2], montrer que, pour tout $n \in IN$, on a :
$$U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n).$$
   En déduire que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
8) Montrer que les deux suites $U$ et $V$ sont convergentes vers la même limite $\ell$ qu'on calculera.