REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTREDE L'EDUCATION ®®®®®®® Ens : Mabrouki Salah Num : 22427502	Epreuve : Mathématiques	
	Section : Mathématique	
	Série n° :2	Séance n° : 8
	Chapitre n°1 : Suites réelles PILOTE	

EXERCICE N°1 :

On considère les suites U et V définies sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 0$, $V_0 = 8$, $U_{n+1} = \sqrt{12 - V_n}$ et $V_{n+1} = \sqrt{12 - U_n}$; $n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $0 \le U_n < 3$ et $3 < V_n \le 8$

2/ a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $V_{n+1} - U_{n+1} \le \frac{1}{3}(V_n - U_n)$

b- En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $V_n - U_n \le 8\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3/ a- Montrer que les suites U et V sont adjacentes.

b- Calculer la valeur de leur limite commune L.

4/ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \, U_k V_K$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $|S_n - 9| \le \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \, |U_k V_K - 9|$

b- Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $|U_k V_k - 9| \le 3(V_k - U_k)$

c- En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $|S_n - 9| \le 24\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Etudier alors $\lim_{n\to+\infty} S_n$

EXERCICE N°2 :

Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 2}$; $n \in \mathbb{N}$

1/ Déterminer la valeur de U_0 pour laquelle la suite U est constante.

Dans toute la suite de l'exercice on prend $U_0 = 4$

2/ a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n > 2$

b- Montrer que la suite U est décroissante.

3/ a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - 2 \le \frac{3}{4}(U_n - 2)$

b- En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n - 2 \le 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

c- Prouver que la suite U converge vers un réel que l'on précisera.

4/ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n = \frac{\sqrt{2^n + 3}}{(\sqrt{2})^{n-2}}$. Retrouver ainsi $\lim_{n\to\infty} U_n$.

5/ Soit n un entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} kU_k$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \le S_n - n(n+1) \le 6n\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.

b- Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$

EXERCICE N°03 :

.Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur R par $f_n(x)=x^3+nx-1$

1. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0,1]$ une solution unique U_n
2. Calculer U_0 et Vérifier que pour tout n de N : $f_{n+1}(x)=f_n(x)+x$.
3. En déduire que la suite (U_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.
4. Vérifier que pour tout n de N^* : $\frac{U_1}{n}\le U_n\le\frac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}nU_n$
5. Montrer que pour tout n de N : $\frac{n}{n+1}\le\frac{U_{n+1}}{U_n}\le\frac{n+3}{n+4}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$
6. Soit pour tout n de N^* : $S_n=\frac{1}{n}(U_1+U_2+\ldots+U)_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_k$.

a. Montrer que (S_n) est décroissante.

b. Montrer que pour tout n de N^* : $S_{2n}\le\frac{S_n+U_n}{2}$

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

EXERCICE N°04 :

. Soit a un réel strictement positif.

On considère la suite U définie sur N^* par $U_1\in\left]0,\frac{a}{2}\right[$ et $U_{n+1}=U_n-\frac{U^2{}_n}{a}$

1. Montrer que pour tout n de N^* : $0<U_n<\frac{a}{2}$.
2. Montrer que U est convergente et calculer sa limite.
3. Soit pour tout n de N^* : $V_n=nU_n$

a. Montrer que pour tout n de N^* : $V_{n+1}-V_n=\frac{(n+1)}{2}\left(\frac{a}{n+1}-U_n\right)U_n$

b. Montrer que pour tout n de N^* : $U_n<\frac{a}{n+1}$

c. En déduire que V est convergente . On note ℓ sa limite.

d. *Montrer que :* $0 < \ell \leq a$.

4. *Soient pour tout n de* N^* : $W_n = \dfrac{1}{a - U_n}$ *et* $H_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k$

a. *Montrer que W est décroissante .*

b. *Vérifier que pour tout n de* N^* : $W_n = \dfrac{1}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{U_n}$

c. *En déduire que* $H_n = \dfrac{n+1}{nV_{n+1}} - \dfrac{1}{nU_1}$

d. *Vérifier alors que* $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = \dfrac{1}{\ell}$

e. *Montrer que pour tout n de* N^* : $W_{2n} \leq 2H_{2n} - H_n \leq W_{n+1}$

f. *En déduire que :* $\ell = a$

<u>EXERCICE N°05 :</u>

On considère la suite U définie par $U_0 = 2$ *et* $\forall n \in N$: $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + \dfrac{1}{6\times 2^n}$

1. *Montrer que pour tout n de N :* $U_n \geq 0$.
2. *Montrer que U est décroissante.*
3. *En déduire que U est convergente et calculer sa limite.*
4. *Soit pour tout n de N :* $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

   a. *Montrer que pour tout n de N ,* $S_n = -3U_{n+1} + \dfrac{1}{2}U_n + \dfrac{7}{2}$.

   b. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

5. *Soit pour tout n de N :* $V_n = nU_n$

   a. *Montrer que pour tout n de N ,* $V_{2n} \leq 2(S_{2n} - S_n)$ *et* $V_{2n+1} \leq V_{2n} + U_{2n}$

   b. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

6. *Soit pour tout n de* N^* : $T_n = \sum_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k+1})$

   c. *Montrer que pour tout n de* N^* , $T_n = S_n - 2 - nU_{n+1}$.

   d. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

EXERCICE N°06 :

1. *Soit la fonction f définie sur* $[1{,}3]$ *par:* $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$

   Montrer que si : $x\in[1{,}3]$ *alors* $f(x)\in[1{,}3]$

2. *Soient les deux suites réelles V et W définie par :* $V_0=1$, $W_0=3$ *et pour tout n de N ,*

   $V_{n+1}=f(V_n)$ *et* $W_{n+1}=f(W_n)$.

   a. *Montrer que pour tout n de N ,* $V_n\in[1{,}3]$ *et* $W_n\in[1{,}3]$.

   b. *Etudier la monotonie de V et W.*

   c. *Montrer que V et W sont convergentes et calculer leurs limites.*

3. *On considère la suite U définie par* $U_0=1$, $U_1=3$ *et* $\forall n\in N$: $U_{n+2}=U_{n+1}+\dfrac{2}{U_{n+1}}-\dfrac{2}{U_n}$

   a. *Etabli que pour tout n de N ,* $U_{n+1}=\dfrac{2}{U_n}+1$.

   b. *Vérifier que pour tout n de N ,* $V_n=U_{2n}$ *et* $W_n=U_{2n+1}$

   c. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

EXERCICE N°07 :

On considère la suite U définie par $U_0=0$ *et* $\forall n\in N$: $U_{n+1}=\dfrac{U_n+6}{U_n+2}$

1. *Montrer que* $U_{n+1}-2$ *et* U_n-2 *sont de signes contraires.*

2. *En déduire que pour tout p de N ,* $U_{2p}\leq 2\leq U_{2p+1}$.

3. *En déduire que si U est convergente, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=2$.

4. *Vérifier que pour tout n de* N^*, $U_n\geq 1$.

5.

   a. *Montrer que pour tout n de N ,* $|U_{n+1}-2|\leq\dfrac{1}{3}|U_n-2|$

   b. *En déduire que pour tout n de N ,* $|U_n-2|\leq\dfrac{2}{3^n}$ *.Calculer alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

6. *Soient les suites définie sur* N^* *par* $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_{2k}$, $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_{2k+1}$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_k$

   a. *Montrer que pour tout pour tout k de* N^* *, on a :* $2 - \frac{2}{9^k} \le U_{2k} \le 2$ *et* $2 \le U_{2k+1} \le 2 + \frac{2}{3\times 9^k}$

   b. *En déduire :* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

   c. *Montrer que pour tout pour tout n de* N^* : $\begin{cases} S_{2n} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{U_{2n+1}}{2n} \\ S_{2n+1} = \frac{n(a_n + b_n)}{2n+1} \end{cases}$

   d. *Calculer alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

************_bac-maths_************