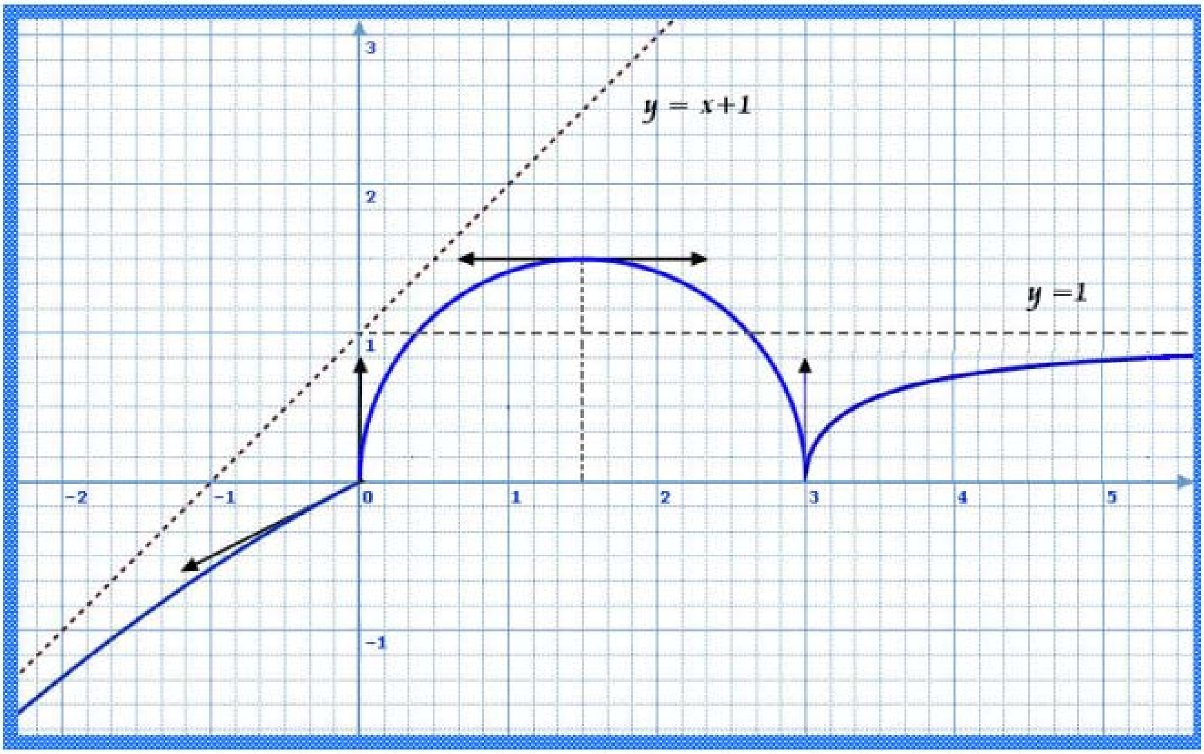
Exercice 1



La courbe ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Cette courbe admet deux asymptotes d'équations $y = 1$ *et* $y = x + 1$.

A l'aide d'une lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1) *Déterminer les limites éventuelles suivantes:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} \quad ;$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{2f(x)-3}{2x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) - x \quad ; \quad \lim_{x\to3} \frac{f(x)}{x-3}$$

2) f *est elle dérivable en* 3 ? *Justifier votre réponse.*

3) f *est elle dérivable en* 0 ? *Justifier votre réponse.*

4) *Dresser le tableau de variations de* f.

5) *Discuter, suivant le paramètre réel* m, *le nombre de solutions de l'équation* $f(x) = m$

Exercice 2

Soit f *la fonction définie sur* $]-1,3[$ *par* $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$. *On note* $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) *Vérifier que pour tout* $x \in]-1,3[$, $f'(x) = \dfrac{4}{\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que le point $A(1,0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

d) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

e) Construire la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,3[$ sur $\mathbb{R}$.

On note g sa fonction réciproque.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère que $\mathscr{C}$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3) a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $0 < g'(x) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet, dans $[1,+\infty[$, une solution unique α et que $\alpha \in]2,3[$.

4) Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que la suite u est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3

Dans le plan, rapporté à un repère orthonormé direct, on considère un losange ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

1) Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le losange ABCD.

a) Montrer que $f([AC]) = [AC]$

b) En déduire que $f(O) = O$.

c) Déterminer alors les quatre isométries qui laissent globalement invariant le losange ABCD. (on pourra discuter suivant $f(A)$ et $f(C)$)

2) a) Donner la nature et les éléments caractéristiques des isométries suivantes :

$f_1 = S_{(AC)} o S_{(AB)}$ et $f_2 = S_{(CD)} o S_{(CA)}$.

b) Caractériser alors l'isométrie $g = r_{\left(C,-\frac{\pi}{3}\right)} o\, r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$.

3) On note E, F et G les symétriques respectives des points A, D et C par rapport au point B. Soit h l'isométrie telle que : $h(A) = E$, $h(B) = F$ et $h(D) = B$.

a) Montrer que h n'admet aucun point fixe.

b) En déduire que h est une symétrie glissante.

c) Montrer que $t_{\overrightarrow{BD}} o\, h = S_{(BD)}$.

d) Donner alors le vecteur et l'axe de h.

ExerciceI

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$ (Coefficient directeur de la demi tangente à gauche de l'origine O)

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ (Demi tangente verticale à droite de l'origine O, dirigée vers le haut.)

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{2f(x)-3}{2x-3} = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{f(x)-\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}} = 0$ (Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0) ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = 1$ car la droite d'équation $y = x+1$ asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{f(x)}{x-3} = -\infty & \text{(demi tangente verticale à gauche au point d'abscisse 3, orientée vers le haut)} \\ \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{f(x)}{x-3} = +\infty & \text{(demi tangente verticale à droite au point d'abscisse 3, orientée vers le haut)} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{f(x)}{x-3} \neq \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{f(x)}{x-3}$ donc $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{f(x)}{x-3}$ n'existe pas.

2) f n'est pas dérivable en 3 car elle n'est pas dérivable à droite (et aussi à gauche) en 3.

3) f n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas dérivable à droite en 0.

4)

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

5) Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = m$.

D'où le tableau suivant:

m	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Nombre de solutions		Une seule solution	Deux solutions	Trois solutions	Deux solutions	Deux solutions	Une seule solution	Aucune solution	

Exercice n°2

Soit f *la fonction définie sur* $]-1,3[$ *par* $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$. *On note* $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) *Vérifier que pour tout* $x\in\,]-1,3[$, $f'(x)=\dfrac{4}{\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3}$

b) *Dresser le tableau de variation de* f.

c) *Vérifier que le point* $A(1,0)$ *est un centre de symétrie pour la courbe* $\mathscr{C}$.

d) *Donner une équation de la tangente* T *à la courbe* $\mathscr{C}$ *au point* A.

e) *Construire la tangente* T *et la courbe* $\mathscr{C}$.

2) a) *Montrer que* f *réalise une bijection de* $]-1,3[$ *sur* $\mathbb{R}$.

On note g *sa fonction réciproque.*

b) *Construire la courbe* $\mathscr{C}'$ *de* g *dans le même repère que* $\mathscr{C}$.

c) *Montrer que pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3) a) *Montrer que* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* $g'(x)$.

b) *En déduire que pour tout* $x\in[1,+\infty[$, $0<g'(x)\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) *Montrer que l'équation* $g(x)=x$ *admet, dans* $[1,+\infty[$, *une solution unique* α *et que* $\alpha\in\,]2,3[$.

4) *Soit la suite* u *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_0\ge 1$ *et* $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=g(u_n)$.

a) *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\ge 1$.

b) *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\alpha|$.

c) *En déduire que la suite* u *est convergente et préciser sa limite.*

Exercice 4

1) a) *Puisque* $f(ABCD)=ABCD$ *donc* $f([AC])$ *est un segment de sommets deux points distincts de l'ensemble* $\{A,B,C,D\}$ *et de même longueur que* $[AC]$

Donc $f([AC])=[AC]$

b) *une isométrie conserve le milieu et puisque* O *est le milieu de* $[AC]$ *alors* $f(O)$ *est le milieu du segment image* $f([AC])=[AC]\Rightarrow f(O)=O$.

c) *Soit* f *une isométrie telle que* $f(ABCD)=ABCD$ *alors* $f(O)=O$ *alors* f *est l'Identité, une rotation ou une symétrie orthogonale.*

On a : $f([AC])=[AC]$ *donc deux cas se présentent :*

1^{er} cas : $f(A) = A$ et $f(C) = C$

f est une isométrie qui fixe deux points distincts A et C $\Rightarrow f = Id$ ou $f = S_{(AC)}$

$2^{ème}$ cas : $f(A) = C$ et $f(C) = A$

Posons $\varphi = foS_{(BD)}$. On a $\varphi(A) = A$ et $\varphi(C) = C$.

φ est une isométrie qui fixe deux points distincts A et C $\Rightarrow \varphi = Id$ ou $\varphi = S_{(AC)}$

Donc $f = S_{(BD)}$ ou $f = S_{(AC)}oS_{(BD)} = S_O$ symétrie centrale de centre O.

Alors les isométrie qui laissent globalement invariant le losange ABCD sont : l'id, $S_{(AC)}$, $S_{(BD)}$ et S_O.

2) a) $f_1 = S_{(AC)}oS_{(AB)}$.

$$\begin{cases}(AB)\cap(AC)=\{A\}\\ (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]\end{cases} \Rightarrow f_1 \text{ est la rotation de centre A et d'angle } \frac{\pi}{3}.$$

$f_2 = S_{(CD)}oS_{(CA)}$.

$$\begin{cases}(CD)\cap(CA)=\{C\}\\ (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\end{cases} \Rightarrow f_2 \text{ est la rotation de centre C et d'angle } -\frac{\pi}{3}.$$

b) $g = r_{\left(C,-\frac{\pi}{3}\right)}or_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(CD)}oS_{(CA)}oS_{(AC)}oS_{(AB)} = S_{(CD)}oS_{(AB)}$ car $S_{(CA)}oS_{(AC)} = Id$

et puisque $(CD)\parallel(AB)$ alors g est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonale de A sur (CD).

c) $t_{\overrightarrow{BD}}oh(B) = t_{\overrightarrow{BD}}(h(B)) = t_{\overrightarrow{BD}}(F) = B$ et $t_{\overrightarrow{BD}}oh(D) = t_{\overrightarrow{BD}}(h(D)) = t_{\overrightarrow{BD}}(B) = D$

$t_{\overrightarrow{BD}}oh$ est une isométrie qui fixe deux points distincts B et D

En plus $t_{\overrightarrow{BD}}oh(A) = t_{\overrightarrow{BD}}(E) \neq A$ car $\overrightarrow{EA} \neq \overrightarrow{BD} \Rightarrow t_{\overrightarrow{BD}}oh \neq Id$

Donc $t_{\overrightarrow{BD}}oh = S_{(BD)}$.

d) $t_{\overrightarrow{BD}}oh = S_{(BD)} \Leftrightarrow h = t_{\overrightarrow{DB}}oS_{(BD)}$ avec $\overrightarrow{DB}$ vecteur directeur de (BD)

Donc h est la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{DB}$ et d'axe (BD).