BAC SCIENCE

Exercice N°1

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, A, B et C sont les points d'affixes respectives : i , $-i$ et $-3i$. A tout point M d'affixes z ($z \neq -3i$) on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{3iz-1}{z+3i}$.

1°) Déterminer les points M pour lesquels M'=M.

2°) Montre que pour $z \neq i$ et $z \neq -3i$, on a: $\dfrac{z'+i}{z'-i} = 2\dfrac{z+i}{z-i}$.

3°) Soit Γ l'ensemble des points M tels que : $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1}{2}$.

a) Déterminer et construire Γ. Vérifier que C appartient à Γ.

b) Montrer , en utilisant 2°) , que :

Si $M \in \Gamma \setminus \{C\}$ alors M' appartient à une droite fixe que l'on précisera .

Exercice N°2

Soit α un réel de l'intervalle : $[\,0\ ,\ \pi\,[$ et soit le nombre complexe : $Z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$

1°/ Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants : Z, $\overline{Z}$, $-Z$ et $\dfrac{1}{Z}$

2°/ Déterminer la forme exponentielle des racines carrées de Z, de $\overline{Z}$ et $-Z$

Exercice N°3

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes chacune des équations suivantes

(1) $2Z^2 + 2Z + 1 = 0$

(2) $Z^2 + (3-2i)Z + 5 - 5i = 0$

(3) $2Z^2 - (1+4i)Z - 1 + 4i = 0$

(4) $(Z+1)^2 + 4 = 0$

(5) $Z^4 - (3+2i)Z^2 + 8 - 6i = 0$

(6) $Z^2 - (3\cos\alpha + i\sin\alpha)Z + 2 = 0$

Exercice N°4

1°) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations :

(1) $z^2 - 6z + 12 = 0$. (2) $z^2 + 2z\sqrt{3} + 12 = 0$.

2°) On note z_1 et z_2 les nombres complexes suivant : $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$; $z_2 = -\sqrt{3} + 3i$.

a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm)

placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 puis le point E d'affixe $z_1 + z_2$.
Quelle est la nature du quadrilatère OAEB ? Justifier.

Exercice N°5

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3+\left(\sqrt{3}-i\right)z^2+\left(1-\sqrt{3}i\right)z-i=0$.

1°) a) Déterminer le réel y tel que yi soit solution de (E).

b) Déterminer les réels a et b tels que , pour tout nombre complexe z :

$$z^3+\left(\sqrt{3}-i\right)z^2+\left(1-\sqrt{3}i\right)z-i=\left(z-i\right)\left(z^2+az+b\right) \ .$$

2°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2+z\sqrt{3}+1=0$.

b) En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique et trigonométrique.

3°) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm

On considère le point A d'affixe $z_A=i$, le point B d'affixe $z_B=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et C, d'affixe z_C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

a) Représenter sur un même graphique les points A,B et C.

b) Déterminer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

c) En déduire une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ et la nature du triangle ABC.

Exercice N°6

1°) a) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-z+\dfrac{1}{2}=0$.

b) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.

2°) a) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$: $\sin^2(2t)-2\left(1-\cos(2t)\right)=-4\sin^4 t$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E):\left(1-\cos(2t)\right).z^2-z.\sin(2t)+\frac{1}{2}=0$$

Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique

Exercice N°7

A) 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-z+1=0$.

Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

2°) En déduire , les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^4-Z^2+1=0$.

B) Soit $\theta\in[0,\pi]$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(2\cos\theta).z+1=0$.

Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.

2°) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation , (E) : $z^3-(i+2\cos\theta\ )z^2+(1+2i\cos\theta)z-i=0$.

a) Vérifier que $z_0=i$ est une solution de (E).

b) Montrer qu'il existe un réel a , dépendant de θ, que l'on déterminer tel que : pour tout z de $\mathbb{C}$ on a :

$$z^3-(2\cos\theta+i)z^2+(1+2i\cos\theta)z-i=(z-i)(z^2+az+1).$$

c) Résoudre l'équation (E).

3°) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A,B et C d'affixe respectives :

i ; $\cos\theta+i\sin\theta$; $\cos\theta-i\sin\theta$.

a) Montrer que le triangle : (ABC est isocèle en B) $\Leftrightarrow (2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0)$

b) Déterminer θ pour que ABC soit isocèle en B.

Exercice N°8

On pose $u=1+i$ un nombre complexe.

A) 1°) Déterminer le module et un argument de u.

2°) Calculer les racines carrées de u par voie trigonométrique et par voie algébrique.

3°) Déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

4°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4=8\sqrt{2}.u$.

b) Construire les points images des solutions dans un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$.

B) On pose $z=r\,e^{i\theta}$; $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in[0,2\pi[$.

1°) Ecrire sous forme exponentielle : z^2 et $(1+i)\overline{z}$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation . $(E): z^2=(1+i)\overline{z}$.

Bon courage :)