4 éme science

Nombres complexes

Exercice N° 1 :

Déterminer la forme algébrique de chacun des complexes suivants :

$z_1 = (1-i)^2$ $z_2 = (1+i)^2$ $z_3 = (1+i)^3$

$z_4 = (2+i)(1-3\,i)$ $z_5 = (1+3\,i)(1-3\,i)$ $z_6 = \dfrac{2+i}{1+3\,i}$

Exercice N° 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}\,, \vec{v} \right)$.

On considère les points A, M et M' d'affixes respectives : 1, $Z = x + i\,y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $Z' = (1-i)Z$

1°/ Exprimer sous la forme algébrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$

2°/ Déterminer l'ensemble *C* des points M tels que : A, M et M' sont alignés.

3°/ Déterminer l'ensemble *C'* des points M tels que : $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AM'}$

Exercice N° 3 :

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}\,, \vec{v} \right)$

On considère le point M d'affixe $Z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1°/ Déterminer les ensembles suivants : $\Sigma = \left\{ M \in \mathcal{P} \;/\; Z^2 \in \mathbb{R} \right\}$ et $\Sigma' = \left\{ M \in \mathcal{P} \;/\; Z^3 \in \mathbb{R} \right\}$

2°/a/ Déterminer en fonction de x et y la forme algébrique du nombre complexe $Z' = \dfrac{Z-3\,i}{Z}$

b/ Déterminer les ensembles suivants : $\Delta = \left\{ M \in \mathcal{P} \;/\; Z' \in \mathbb{R} \right\}$ et $\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \;/\; Z' \in i\,\mathbb{R} \right\}$

c/ Déterminer l'ensembles : $\mathcal{C}' = \left\{ M \in \mathcal{P} \;/\; |Z'| = 2 \right\}$

Exercice N° 4 :

On considère les deux complexes : $Z = (1+i)^{2n}$ et $U = (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$ où n est un entier naturel

1°/ Montrer que : $U = 2\,\mathrm{Re}\,(Z)$

2°/ Montrer que : a/ $n = 4p \Rightarrow \begin{cases} Z = 2^n \\ U = 2^{n+1} \end{cases}$ b/ $n = 4p+1 \Rightarrow \begin{cases} Z = 2^n i \\ U = 0 \end{cases}$

c/ $n = 4p+2 \Rightarrow \begin{cases} Z = -2^n \\ U = -2^{n+1} \end{cases}$ d/ $n = 4p+3 \Rightarrow \begin{cases} Z = -2^n i \\ U = 0 \end{cases}$

3°/ On suppose que $n = 4p$

a/ Montrer que : $U = 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n}^{2k}$

b/ En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n}^{2k} = 2^n$

www.devoirat.net 2017

Exercice N° 4 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = (1+i)\bar{z}$.

1°/ Soit r le module de z . Exprimer en fonction de r le module de Z .

2°/ Soit θ un argument de z .Exprimer en fonction de θ un argument de Z.

3°/ Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|Z| = 2$.

4°/ Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tel que le point d'affixe Z soit situé sur la droite $\Delta : 2x + y + 4 = 0$.

5°/ Trouver l'ensemble des point M d'affixe z tel que $Z \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice N° 5:

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A d'affixe 2i.

Soit φ l'application de $P\backslash\{A\} \longrightarrow P$ qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{2iz - 5}{z - 2i}$.

1°/ Montrer que $M' \neq A$.

2°/ Exprimer z en fonction de z' .

3°/ Soient B et C les points d'affixes respectives $-i$ et $5i$. Montrer que B et C sont invariants par f .

4°/ Montrer que si M appartient à la droite (BC) privée de A alors son image M' par φ , appartient à (BC).

5°/ a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 2$,on a : $|z' - 2i| \cdot |z - 2i| = 9$.

b) En déduire que pour tout point M appartenant au cercle Γ de centre A et de rayon 3, le point M' appartient à P.

www.devoirat.net 2017