LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « $4^{\text{éme}}$ MATHS »	SUJET DE REVISION N°4 *Les coniques - Arithmétique - Analyse*

EXERCICE 1 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit la courbe (Γ) dont une équation est : $y^2 + 2y - 4x + 3 = 0$.

1) a) Montrer que (Γ) est une parabole dont on précisera les éléments caractéristiques.
   b) Tracer (Γ).
2) Soit le point A(-1,1). Déterminer par leurs équations les tangentes (T) et (T') à la parabole (Γ) menées du point A, dont on précisera leurs points de contact avec (Γ).

EXERCICE 2 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la conique (C) d'équation : $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$

1) Montrer que (C) est une hyperbole dont on précisera le centre Ω, les directrices, les sommets et les asymptotes. Tracer (C).
2) Soit les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$
   Donner une équation de (C) dans le repère $\mathfrak{R}' = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

EXERCICE 3 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

1) Déterminer la forme complexe de f.
2) Une courbe (C) a pour équation : $15x^2 + 13y^2 - 2\sqrt{3}xy - 768 = 0$
   a) Déterminer une équation cartésienne de (C') image de (C) par f.
   b) En déduire que (C') est une ellipse que l'on caractérisera. Tracer (C').
3) Déterminer alors la nature de la courbe (C) et préciser ses caractéristiques.

EXERCICE 4 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (E) la conique dont le point $F(\sqrt{3}, 0)$ est l'un de ses foyers, le point S(2,0) est l'un de ses sommets et la droite D : $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ est l'une de ses directrices.

1) Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne.
2) Montrer que la droite (T) : $x\sqrt{3} + 2y = 4$ est une tangente à (E) en un point A que l'on précisera.

EXERCICE 5 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

1) Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ et préciser ses foyers, ses sommets. Tracer $\mathscr{C}$.

2) Déterminer les équations des hyperboles de centre O, dont les sommets sont des sommets de $\mathscr{C}$ et les asymptotes sont perpendiculaires. Tracer ces hyperboles.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\int_0^{6\sin x}\sqrt{36-t^2}\,dt$.

   a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

   b) Montrer que l'aire de $\mathscr{C}$ en unité d'aires est $\mathscr{A}=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

   c) En déduire la valeur de $\mathscr{A}$.

EXERCICE 6 :

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 5.
2) Soit $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$; $n \in \mathbb{N}$. Déterminer suivant les valeurs de n les restes de A_n modulo 5.
3) Résoudre dans IN l'équation $A_n \equiv 3 (\text{mod } 5)$.
4) Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier $N=1253^{2014} \times 13^{2015}$.

EXERCICE 7 : (Bac 2012)

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$.

   a) Montrer que le couple (9,–3) est une solution particulière de l'équation (E).

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

EXERCICE 8 : (Bac Maths 2015)

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x+53y=1$.

   a) Vérifier que $(-9,8)$ est une solution de (E).

   b) Résoudre l'équation (E).

   c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.

   d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

2) a) Justifier que $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$.

   b) Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53.

3) Soit $N=1+45+45^2+\ldots+45^{105}=\sum_{k=0}^{k=105} 45^k$.

   a) Montrer que $44N \equiv 10 \pmod{53}$.

   b) En déduire le reste de N modulo 53.

EXERCICE 9 :

1) Vérifier que $7^2 \equiv -1 (\text{mod} 10)$
2) Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel $1+7+7^2+\ldots+7^{400}$?

EXERCICE 10 :

Soit n un entier naturel, on considère les entiers p= n+5 et q=2n+3 et on note d = PGCD (p,q)

1) a) Calculer 2p – q. En déduire les valeurs possibles de d.

b) Montrer que si p est un multiple de 7 alors q est un multiple de 7.

c) Montrer que p est un multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

2) Montrer que d = 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

3) Application : Déterminer d dans chacun des cas suivants,

a) $n = 6^{2014} + 7^{2015}$.

b) $n = 6^{2014} + 8^{2015}$.

EXERCICE 11 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes :

a) $5x \equiv 4(\text{mod}11)$ b) $x^2 \equiv 3(\text{mod}7)$ c) $x^2 - x + 4 \equiv 0(\text{mod } 3)$

EXERCICE 12 :

1) le quotient de (-23) par (-5) est 4.

2) Si a et b sont deux entiers tels que 64a + 9b = 1alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.

3) $147^{146} \equiv 2(\text{mod } 12)$

4) $x^2 \equiv 0(\text{mod } 8)$ équivaut à $x \equiv 0(\text{mod } 8)$

5) Si $\begin{cases} x \equiv 3(\text{mod } 4) \\ x \equiv 4(\text{mod } 5) \end{cases}$ alors $x \equiv 19(\text{mod } 20)$

6) L'équation 3x+6y=8 admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

7) Soit n un entier. Alors les nombres 2n+3 et 5n+7 sont premiers entre eux.

EXERCICE 13 :

A/ Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $3x - y = 4$.

1) a) Vérifier que (1,-1) est une solution de l'équation (E)

b) Montrer alors que les solutions de (E) sont les couples $(k+1\,, 3k-1)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

B/ Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN, on a : $u_n = 2 + 3^{n+1}$

b) Vérifier que pour tout $n \in$ IN, on a : $3^n \equiv 1[2]$.

c) En déduire que pour tout $n \in$ IN, u_n est un nombre impair.

2) Vérifier que pour tout $n \in$ IN, le couple (u_n, u_{n+1}) est une solution de l'équation (E).

3) En déduire que pour tout $n \in$ IN, les termes u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

4) Déterminer alors le PGCD$(6 + 3^{1002}, 6 + 3^{1003})$

PROBLÈME 1 : (BAC PRINCIPAL 2011)

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 .

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\quad 1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $\quad x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point I $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe ($\mathcal{C}$).

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe ($\mathcal{C}$) au point I.

3) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé

a) Construire I.

b) Construire la tangente T.

c) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$).

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = k$ et $x = k + 1$ où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k$.

5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

a) Interpréter graphiquement S_n .

b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

PROBLÈME 2 :

Ci-dessous, on représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe $(\mathcal{C})$

de la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ par $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$ et les demi- tangentes à la

courbe $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e.

1) a) En utilisant le graphique, justifier que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ sur $[-2, 2]$.

b) Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe $(\mathcal{C}')$ de la fonction f^{-1} réciproque de f, on précisera ses demi- tangentes aux points d'abscisses -2 et 2

2) Soit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$

a) Calculer a_1

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$;

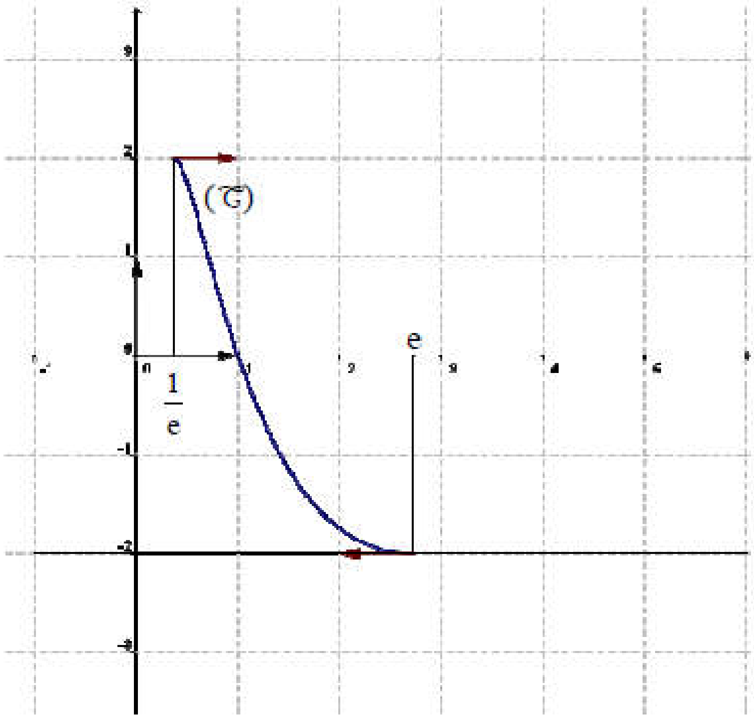
$$a_{n+1} = e - (n+1)a_n$$

c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$

3) Soit $\mathcal{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limité par la courbe $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = 0$ et $y = e$

a) Calculer $\int_1^e f(x)dx$

b) En déduire $\mathcal{A}$



PROBLÈME 3 :

On pose $F(x)= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de F.

   b) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur IR.

   c) Montrer que la fonction $\varphi : x \longmapsto F(x)+F(-x)$ est constante sur IR.

   En déduire que F est impaire.

2) On pose $g(x)= \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

   a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer g'(x).

   b) Calculer g(0). En déduire que g(x)=x

   c) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

3) a) Vérifier que F est la réciproque de f (restriction de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$).

   b) En déduire $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x)$

PROBLÈME 4 :

Soit (a_n) une suite réelle définie sur IN par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\sqrt{1+{a_n}^2}}$

1) a) Montrer que pour tout n ∈IN, on a : $0 < a_n \leq 1$

   b) Etudier la monotonie de (a_n), puis déduire qu'elle converge et calculer sa limite L.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in \left]0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\frac{\tan x}{1+\sqrt{1+(\tan x)^2}} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

   b) Montrer que pour tout n ∈IN, on a : $a_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

   c) Retrouver $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n$

3) Pour tout n∈ IN, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

   a) Calculer : u_0 et v_0

   b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite L.

   c) Montrer que $2-\sqrt{2} \leq L \leq 1$

PROBLÈME 5 :

On considère les équations différentielles :

$(E_0): (1+e^x)y' - y = 0$ et $(E): (1+e^x)y' - y = e^{2x}$

1) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ Montrer que g est une solution de (E) sur IR.

2) Soit f une fonction dérivable sur IR.

   Montrer que f est une solution de (E) si est seulement si $(f-g)$ est une solution de (E_0).

3) On pose $z = (1+e^x)y$

   a) Montrer que si y est une solution de (E_0) sur IR alors z est une solution d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.

   b) En déduire que les solutions de (E) sur IR sont les fonctions f définies par : $f(x) = \frac{ke^x+e^{2x}}{1+e^x}$; $k \in IR$.

PROBLÈME 6 :

1.a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'=y$.

b. Déterminer la solution particulière g de l'équation (E) qui vérifie g(0)=1 .

c. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(\frac{1}{x})=\sqrt{x}.g^{-1}(x)$ ou g^{-1} la fonction réciproque de g . Expliciter $f(x)$ .pour $x\in]0,+\infty[$.

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=-\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

2. Montrer que pour tout réel $x\in]0,+\infty[$ on a $f'(x)=\frac{\ln(x)-2}{2x\sqrt{x}}$ puis dresser le tableau de variation de f .

3. Pour tout entier naturel non nul n on pose : $g_n(x)=\mathrm{f(x)}-\mathrm{x}^n$.

a. Montrer que g_n est une fonction décroissante sur $]0,1[$.

b. Déduire que pour tout entier naturel non nul n il existe un unique réel $\alpha_n\in]0,1[$ tel que

$f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$.

c. Montrer que Pour tout entier naturel non nul n on a : $g_n(\alpha_{n+1})\prec 0$.

d. Déduire que la suite (α_n) est croissante et convergente .

4. Posons $L=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$.

a. Vérifier que : $0\prec\alpha_1\leq L\leq 1$.

b. Soit h la fonction définie sur $]0,1[$ par $h(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\ln(-\ln(x))}{\ln(x)}$.

Vérifier que $h(\alpha_n)=n$.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to1^-}h(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$ puis montrer que : L = 1 .

d. Déduire que : $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n)^n=0$.

5. Pour tout entier naturel non nul n on pose : $U_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})$.

a. Montrer que : $\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n})\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)dx\leq\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$. avec $k\in\{1;......;n-1\}$

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

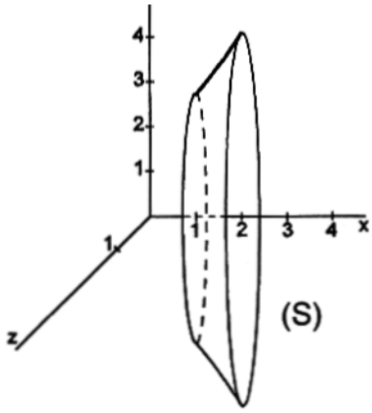
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)dt\leq U_n\leq\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})+\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)dt$$

c. Déduire que : $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=4$.

PROBLÈME 7: (Bac principal 2010)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox).

Le but de cet exercice est de calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.



1) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}} dt$.

   Vérifier que $\mathcal{V} = \pi F(2)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t \, dt$.

   a) Montrer que G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2 F'(x)$.

   b) En déduire que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $2 F(x) = G(x) - G(1)$.

3) a) Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $G(x) = \left(\sqrt{4x} - 1\right)e^{\sqrt{4x}}$.

   b) Calculer alors $\mathcal{V}$.

PROBLÈME 8:

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Montrer que le point I(0,1) est un centre de symétrie de (C).

2) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$

   En déduire que la droite d'équation y=x+2 est une asymptote è (C) au V($-\infty$).

b) Montrer que (C) admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR.

   b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR et que $\alpha \in]-2,-1[$ puis vérifier que $e^{\alpha} = -\frac{2+\alpha}{\alpha}$

   c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur IR. Calculer $(f^{-1})'(1)$ et vérifier que $(f^{-1})'(0)=\frac{2}{\alpha^2+2\alpha+2}$

4) a) Tracer la courbe (C) et la courbe (C') de f^{-1}.

   b) Calculer l'aire de la région du plan limitée par (C') et les droites d'équations : y=0, x=0 et x=1

5) Soit U la suite définie sur IN par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = ln(1 + 2e^{u_n})$

   a) Montrer que pour tout n∈IN, $u_n \geq 0$.

   b) Soit $v_n = f(u_n) - u_n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

   c) Calculer v_n puis u_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n}$

PROBLÈME 9:

Partie I

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On considère la fonction g_n définie sur IR*+ par $g_n(x) = nx + 2\ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de g_n.
2) Montrer que pour tout $x \in$ IR*+, on a $\sqrt{x} > \ln x$.
3) a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans IR*+ une unique solution notée α_n, puis que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$.

Partie II

I. soit f la fonction d éfinie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{x}\ e^{-x}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

4) tracer C_f. on prendra $f\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0.5$.

II. On pose $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

1) a) Montrer que $f(I) \subset I$.

   b) A l'aide de la question 3) a) de la partie II, montrer que $|f'(x)| \le \frac{2}{3}$.

   c) Montrer que $\left[x = \alpha_3 \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } f(x) = x)\right]$, où α_3 est la solution de l'équation $g_3(x) = 0$

2) Soit $(u_n)_{n\ge 0}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha_3| \le \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha_3| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

   d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge 0}$ est convergente et donner sa limite.