LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « $4^{éme}$ MATHS »	SUJET DE REVISION N°3 *Arithmétique - L'espace - Analyse*

EXERCICE 1 :

1) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $3x - 8y = 5$.
   Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x,y) tels que x=8k−1 et y=3k−1.
2) a) Soit n, x et y trois entiers tels que $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$ Montrer que (x,y) est une solution de l'équation (E).
   b) On considère le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$ où n est un entier.
   Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23 \pmod{24}$.
3) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de 2^kmodulo 3 puis le reste de 7^{2k} modulo 8.
   b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $1991^{2008} - 1$ est divisible par 24.

EXERCICE 2 :(Bac principal 2014)

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{10}$.
   a) Montrer que $a^9 + a^8 + \cdots + a + 1 \equiv 0 \pmod{10}$
   b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 \pmod{10}$
   (On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + \cdots + a + 1)$).
2) Soit b un entier.
   a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.
   b) En déduire que $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ si et seulement si b est premier avec 10.
3) Soit b un entier premier avec 10.
   a) Montrer que $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$
   b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}.

EXERCICE 3 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(1,3,2), B(1,-1,-2) et C(2,4,1) .

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$.
2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.
   a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.
   b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] .
   c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle $\mathcal{C}$
3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.
   a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.
   b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle $\mathcal{C}'$.
   c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle $\mathcal{C}'$ en un point E que l'on précisera.

EXERCICE 4 :

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \frac{lnx}{2}$

   a) Dresser le tableau de variation de g.

   b) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g(x).

2) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x-lnx}{2\sqrt{x}}$

   a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

   b) Etablir le tableau de variation de f.

   c) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique = $2cm$)

   d) Calculer à l'aide d'une intégration par partie, l'intégrale $J = \int_1^2 f(x)dx$. En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équations $x = 1$, $x = 2$ et $y = 0$.

3) Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(1+\frac{k}{n})$.

   a) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :

   $\frac{1}{n}.f(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}.f(1+\frac{k+1}{n})$

   b) Montrer que $J + \frac{f(1)}{n} \leq u_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$

   c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 5 :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x.e^{-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe (C).

2) a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$. $(\lambda \geq 2)$

   b) En déduire que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{2}{e}$

3) a) Montrer que la restriction g de la fonction f à l'intervalle $[1,+\infty[$ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera et tracer la courbe (C') de la fonction g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   b) Montrer que $\int_{2e^{-2}}^{e^{-1}} g^{-1}(t)dt = \frac{3e-7}{e^2}$

4) Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^n} = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

   a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   b) Montrer que pour tout k de IN* , on a : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$

   En déduire que pour tout n∈ IN*, on a : $\frac{n}{e^n} + \int_1^n f(t)dt \leq u_n \leq \frac{1}{e} + \int_1^n f(t)dt$

   c) Déduire alors que la suite (u_n) est convergente et encadrer sa limite.

EXERCICE 6 :

On pose pour tout $n \in$ IN*, $u_n = \int_1^e (lnx)^n.dx$

1) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0$ pour tout n∈ IN

   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) Á l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n∈ IN, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$

3) a) En tenant compte des questions 1)a) et 2) , montrer que $\frac{e}{n+2} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) Soit la fonction $f : x \longmapsto (lnx)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Montrer que $u_1 = 1$. En déduire u_2 et u_3.

b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de $(O,\vec{\imath})$ de la partie du plan limitée par (C), l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

EXERCICE 7 :

1) Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = xe^{1-x}$

a) Montrer que pout tout $x \geq 1$, $f(x) \leq x$ et que pour tout $0 \leq x \leq 1$, $f(x) \geq x$

b) Vérifier que pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a : $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,+\infty[$.

2) On considère la suite (u_n) définie sur IN, par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall\, n \in$IN.

a) Montrer que pour tout $n \in$IN, $0 \leq u_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

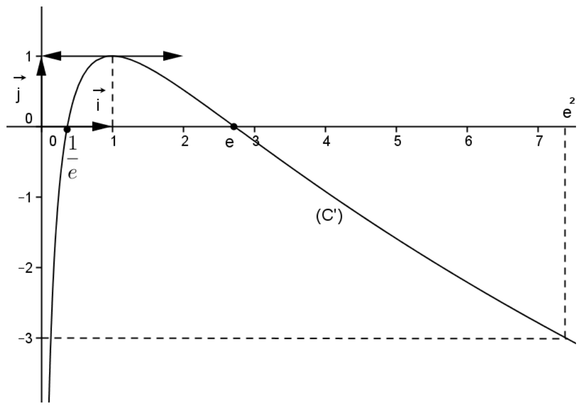
c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 8 :

Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur [0,+∞[par : $\begin{cases} f(x) = -x(a+blnx)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

où a et b sont deux réels tels que a > 0 et b > 0.

On admet que $f(\frac{1}{e}) = -\frac{4}{e}$ et $f(e) = 0$



1) a) En utilisant l'égalité : $x.ln^2x = (\sqrt{x}\,lnx)^2$ pour tout $x > 0$, calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} x.ln^2x$

b) En déduire que f est continue en 0

2) A l'aide du graphique :

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Déterminer $f'(1)$ et $f''(1)$.

c) Montrer que le point A(1,-1) est un point d'inflexion de (C) (la courbe de f selon un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) En se servant des valeurs de $f(\frac{1}{e})$ et f(e), montrer que : a = 1 et b = −1.

4) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limtée par (C'), l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équations : $x = \frac{1}{e}$ et $x = e^2$.

5) a) Montrer que (C) admet au point O(0,0) une demi tangente verticale.

b) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de +∞.

c) Résoudre dans IR l'équation $f(x) = -x$ puis tracer (C) et la droite D : $y = -x$.

6) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par (C), la droite D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e^2$.