Classe

Devoir e Mathématiques N^o 1

Exercice 1 :

Démontrer que pour tout $a; b \in \mathbb{Z}$, le nombre $N = (a+b)^5 - a^5 - b^5$ divisible par 5.

Exercice 2 :

La somme de deux entiers naturels est 2096. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 5 et le reste 206. Quels sont ces nombres ?

Exercice 3 :

Soit a un entier naturel impair, montrer que $a^2 + 4a - 5$ est divisible par 8.

Exercice 4 :

Montrer que si n premier alors $n + 7$ n'est pas premier.

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$

$$x^2 = 4y^2 + 3$$

Exercice 6 :

Soit $b \in \mathbb{N}^\star$. En divisant 250 par b le reste est 7. En divisant 500 par b le reste est 5. Que vaut b ?

DS 1 - 1ère Maths

I Dressons le triangle de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

d'où $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

et donc $N = (a+b)^5 - a^5 - b^5$

$$= 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4$$

$$= 5(a^4b + 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + ab^4)$$

En conséquence 5 divise N.

II On a

$$\begin{cases} a+b = 2096 \\ a = bq + r \text{ avec } q=5 \text{ et } r=206 \ ; \ 0 \leq r < b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2096 \\ a = 5b + 206 \ ; \ b > 206. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5b + 206. \\ 6b + 206 = 2096 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5b + 206 \\ 6b = 1890 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b = 315 \\ a = 1781 \end{cases}}$$

III a est impair donc $a = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

en conséquence

$$N = a^2 + 4a - 5$$

$$= (2k+1)^2 + 4(2k+1) - 5 = 4k^2 + 4k + 1 + 8k + 4 - 5$$

J'ai $N = 4k^2 + 12k$

$= 4k(k+3)$

et $k(k+3)$ est toujours pair car soit k est pair (et $k+3$ impair)

soit k impair et donc $k+3$ est pair

Finalement $k(k+3)$ étant pair, on a $k(k+3) = 2K$ avec $K \in \mathbb{Z}$

et donc $N = 4 \times 2K = 8K$

donc $\boxed{8 \text{ divise } N.}$

IV n est premier.

. si $n = 2$ alors $n+7 = 9$ n'est pas premier.

• si $n > 2$ et n premier alors n impair donc $n+7$ est un nombre pair qui n'est donc pas premier

V $x^2 = 4y^2 + 3$

$\iff x^2 - 4y^2 = 3$

$\iff (x-2y)(x+2y) = 3$ (donc $x-2y$ et $x+2y$ diviseurs de 3)

4 cas sont possibles

① $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

② $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

③ $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+2y=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x-2y=-3 \\ x+2y=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Finalement il n'y a pas de solut° $\boxed{S=\emptyset}$

VI Par hypothèses on a $\begin{cases} 250=qb+7 & \text{avec } 0\leq 7<b \\ 500=q'b+5 & \text{avec } 0\leq 5<b \end{cases}$

d'où $b>7$ et b satisfait les 2 équations.

par différence de L_2-L_1 on a

$250=b(q'-q)+5-7 \iff 250=b(q'-q)-2$

$\iff 250=b(q'-q-1)+b-2$

et sachant que $b>7$ on a $0\leq b-2<b$

ainsi la dernière écriture est la division euclidienne de 250 par b ; le reste étant $b-2$.

En conséquence (par hypothèse) $b-2=7 \Rightarrow \boxed{b=9}$.

Vérificat° : $250=27\times 9+7$

$500=59\times 9+5$