EXERCICES PPCM-PGCD

EXERCICE 1

Trouver les couples $(a\ ,\ b)$ d'entiers naturels tels que $0 < a < b$ dont le PGCD d et le PPCM m vérifiant :

$2m + 3d = 78$ et tels que a ne soit pas un diviseur de b

EXERCICE 2

Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a,b\}$ vérifiant: $m - 18d = 791$

où m est le PPCM et d le PGCD des nombres a et b.

EXERCICE 3

Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que

$\text{PGCD}(a,b) + \text{PPCM}(a,b) = b + 9$.

EXERCICE 4

Trouver les couples d'entiers naturels (a,b) vérifiant le système:

$$a + b = 651 \text{ et } \text{PPCM}(a,b) = 108.\text{PGCD}(a,b)$$

EXERCICE 5

Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que

$\text{PGCD}(a,b) = 10$ et $\text{PPCM}(a,b) = 100$

EXERCICE 6

Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Soit z un nombre complexe vérifiant:

$z^n = 1$ et $z^m = 1$.

Montrez que $z^d = 1$ où $d = \text{PGCD}(n,m)$

EXERCICE 7

Déterminez tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que:

$m^2 - 5d^2 = 2000$

Puis déterminer tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que:

$m^2 - 7d^2 = 2000$

où $d = \text{PGCD}(a,b)$ et $m = \text{PPCM}(a,b)$.

EXERCICE 8

Soit n un entier naturel. On étudie l'équation $(x - 2n)(y - 2n) = 2n^2$ (1) dont les couples solutions sont éléments de $\mathbb{Z}^2$

1) Soit (x,y) une solution de (1) et d le PGCD de $x - 2n$ et $y - 2n$.
   Démontrer que d est un diviseur de PGCD(x,y).
2) (x,y) étant une solution de (1), à partir de la relation $x^2 + y^2 = (x+y-2n)^2$, déduire que PGCD(x,y) divise d.
3) Montrer que si (x,y) est une solution de (1) alors PGCD(x,y) divise n.
4) Lorsque $n=30$ résoudre le système constitué de (1) et de $\text{PGCD}(x,y)=1$

EXERCICE 9

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels vérifiant la propriété suivante:
"Pour tout couple d'entiers naturels (n,p) , $PGCD(U_n,U_p)=PGCD(U_n,U_{p+n})$"
a: Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, U_n est un diviseur de U_0 .
b: Montrer que pour tout (n,p) couple d'entiers naturels, on a:
$PGCD(U_n,U_p) = U_{PGCD(Un,Up)}$.

Corrections PPCM-PGCD **Exercice 1**

On peut commencer par remarquer que $d \leq m$ et que d et m sont tous deux positifs
Donc, s'ils vérifient $2m + 3d = 78$ alors on doit avoir $d < 26$.
Si on pose a' et b' définis par : $a = a'.d$ et $b = b'.d$, on sait que, d étant le PGCD de a et b alors a' et b' sont premiers entre eux.
Comme PGCD(a,b).PPCM(a,b) = $a.b$, on en déduit que :
$m = a'.b'.d$
L'équation peut alors s'écrire: $d(2a'.b' + 3) = 78$.
Comme $(2a'.b' +3)$ est impair, d est pair et doit être un diviseur de 78 inférieur à 27. Donc, $d = 2$ ou 6.
Si $d = 2$ alors $(2a'.b' + 3) = 39$ et $a'.b' = 18$.
Comme a' et b' sont premiers entre eux, on a:
($a' = 1$ et $b' = 18$) ou ($a' = 2$ et $b' = 9$).
D'où ($a = 2$ et $b = 36$) ou ($a = 4$ et $b = 18$) (on a $a < b$).
Comme a ne doit pas diviser b, la première solution n'est pas envisageable.
Si $d = 6$ alors $(2a'.b' + 3) = 13$ et $a'.b' = 5$.
D'où $a = 6$ et $b = 30$. Mais a ne doit pas diviser b donc cette solution n'est pas acceptable.
Seule solution {(4 , 18)}

Exercice 2

a' et b' sont définis par : $a = a'.d$ et $b = b'.d$
On peut toujours supposer que a $\leq b$.
On sait que a' et b' sont premiers entre eux.
On sait aussi que $m = d.a'.b'$
Alors, $d(a'.b' - 18) = 791$.
d est donc un diviseur de 791. La décomposition de 791 en facteurs premiers est :
791 = 7x133. D'où 4 cas possibles:

- $d = 1$: alors $a'b' = 809$. Comme 809 est premier, on a
  $a' = 1$ et $b' = 809$ d'où une solution : $\{a,b\} = \{1 ,809\}$
- $d = 7$: alors $a'b' = 131$. Ce nombre est aussi premier, on a donc: $a' = 1$ et $b' = 131$ d'où la solution {7 ,917 }
- $d = 113$: alors $a'b' = 25$.
  Comme a' et b' sont premiers entre eux, on a:
  $a' = 1$ et $b' = 25$ d'où la solution {113 , 2828 }
  $d = 791$: alors $a'b' = 19$. Nombre premier donc
  $a' = 1$ et $b' = 19$ d'où la solution {791 , 15029}

Conclusion:
Les paires $\{a,b\}$ solutions sont :
{1 , 809} , {7 , 917} , {113 , 2828} , {791 , 15029}

Exercice 3

Posons d = PGCD(a,b) et m = PPCM(a,b).
On sait alors que $d.m = a.b$
Comme d est un diviseur de b et de m, la relation : $d + m = b + 9$ implique que d doit être aussi un diviseur de 9.
Les valeurs possibles de d sont donc : 1 ou 3 ou 9.

*** Si d = 1.**

Dans ce cas, a et b sont premiers entre eux.

La relation s'écrit : $1 + a.b = b + 9$ ou encore : $b(a - 1) = 8$.

On obtient alors :

$b = 1$ et $a - 1 = 8$ donc $a = 9$. Le couple (9,1) est solution

OU

$b = 2$ et $a - 1 = 4$ donc $a = 5$. Le couple (5,2) est solution.

OU

$b = 4$ et $a - 1 = 2$ donc $a = 3$. Le couple (3,4) est solution.

OU

$b = 8$ et $a - 1 = 1$ donc $a = 2$. Non solution car non-premiers entre eux.

***Si d = 3.**

Dans ce cas la relation s'écrit, comme $m = ab / d$ on a :

$9 + a.b = 3b + 27$ ou encore $b(a - 3) = 18$.

Comme b doit être un multiple de $d = 3$, les valeurs possibles de b sont alors: 3 ou 6 ou 9 ou 18. D'où les cas:

$b = 3$ et $a - 3 = 6$ donc $a = 9$. Le couple (9,3) est solution.

$b = 6$ et $a - 3 = 3$ donc $a = 6$. Non solution car leur PGCD n'est pas 3.

$b = 9$ et $a - 3 = 2$ donc $a = 5$. Non solution car leur PGCD n'est pas 3.

$b = 18$ et $a - 3 = 1$ donc $a = 4$. Non solution car leur PGCD n'est pas 3.

***Si d = 9.**

Dans ce cas, comme $m = ab / d$, la relation s'écrit :

$81 + ab = 9b + 81$ ou encore $ab = 9b$.

Si b est non nul, alors $a = 9$.

Les solutions obtenues sont alors de la forme $(9 , 9k)$ k est un entier naturel nul quelconque (car b est divisible par 9).

Si $b = 0$ alors a est quelconque.

Mais comme PGCD(a, 0) = a et PPCM(a , 0) = 0, la relation s'écrit dans ce cas : $a + 0 = 0 + 9$ donc $a = 9$ et le coule (9 , 0) est solution.

<u>Conclusion:</u>

L'ensemble des couples d'entiers naturels (a , b) vérifiant :

PGCD(a , b) + PPCM(a , b) = $b + 9$

est formé des éléments :

(9 , 1) , (5 , 2) , (3 , 4) , (9 , 3) , (9 , $9k$) où k est un entier naturel.

<u>Exercice 4</u>

On cherche tous les couples d'entiers (a , b) vérifiant :

$a + b = 651$ et PPCM(a , b) = 108.PGCD(a , b).

Posons, comme d'habitude, m = PCM(a ,b) et d = PGCD(a , b).

On sait que $a.b = m.d$.

<u>Première remarque:</u>

Comme $a + b = 651$ et que d est un diviseur de a et b, d est aussi un diviseur de 651. Or , la décomposition de 651 en facteurs premiers est :$651 = 3 * 7 * 31$.

Les diviseurs de 651 sont donc : 1 - 3 - 7 - 31 - 21 - 93 - 217 - 651.

Deuxième remarque:

En multipliant par d dans la relation : PPCM(a , b) = 108.PGCD(a , b) , on peut alors écrire que le couple (a , b) doit vérifier :

$$a + b = 651 = S \quad \text{et} \quad a.b = 108.d^2 = P \quad .$$

a et b doivent donc être les solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 - S.X + P = 0 \quad \text{ou encore} \quad X^2 - 651.X + 108.d^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 651^2 - 432.d^2$.

En fonction de d les valeurs possibles de a et b sont alors, en utilisant l'expression des racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant:

$$a = \frac{651 - \sqrt{651^2 - 432d^2}}{2} \quad et \quad b = \frac{651 + \sqrt{651^2 - 432d^2}}{2}$$

Mais comme d doit être un diviseur de 651 et que l'existence de ces racines suppose que le discriminant soit positif, les seuls cas à étudier sont :

$$d = 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 7 \text{ ou } 21 \text{ ou } 31.$$

- Pour d = 1 ou 3 ou 7 , les valeurs a et b obtenues ne sont pas entières.
- Pour d = 21, on obtient a = 84 et b = 567.
- Pour d = 31 , on obtient a = 279 et b = 372.

Il ne reste plus qu'à tester ces éventuelles solutions:

- **Pour *a* = 84 et *b* = 567** , on a :
  PGCD(84 , 567) = 21 et PPCM(84 , 567) = 2268 = 108 * 21.
  Donc (84 , 567) est une solution, et par symétrie, on a aussi (567 , 84).
- **Pour *a* = 279 et *b* = 567** , on a :
  PGCD(279 , 372) = 93 (et non 31 comme prévu!!!) et
  PPCM(279 , 372) = 1116 qui n'est pas égal à 108*93.
  Ce n'est pas une solution.

Conclusion:

Les seuls couples vérifiant a + b = 651 et PPCM(a , b) = 108.PGCD(a , b) sont (84 , 567) et (567 , 84)

Exercice 6

Pour n et m sont deux entiers naturels, considérons la division euclidienne de m par n.

$$m = Q.n + R \text{ avec } 0 \leq R < n.$$

Si z est un nombre complexe vérifiant $z^n = z^m = 1$ alors :

$$1 = z^m = z^{Q.n + R} = (z^n)^Q . z^R = 1^Q . z^R = z^R$$

De même, si R' est le reste de la division euclidienne de n par R alors $z^{R'} = 1$

Comme le PGCD de n et m est le dernier reste non nul dans l'Algorithme d'Euclide, on en déduit que $z^{\text{PGCD}(n , m)} = 1$.

Autre méthode , avec le théorème de Bezout:

On sait que qu'il existe u et v dans **Z** tels que PGCD(n , m) = $u.n + v.m$.

On en déduit alors que :

$$z^{\text{PGCD}(n , m)} = z^{u.n + v.m} = z^{u.n} . z^{v.m} = (z^n)^u . (z^m)^v = 1^u . 1^v = 1$$

Exercice 7

On sait que si d et m sont respectivement le PGCD et le PPCM de a et b alors:
1: $ab = md$
2: Il existe A et B premiers entre eux tels que $a = \mathrm{A}d$ et $b = \mathrm{B}d$.
3: m est un multiple de d.

Pour l'équation : $m^2 - 5d^2 = 2000$, comme d^2 devise m^2,
d^2 doit donc être aussi un diviseur de 2000.
Décomposons alors 2000 en facteurs premiers. $2000 = 2^4 \times 5^3$.
Les diviseurs carrés de 2000 sont alors :

$1 \ , \ 2^2 \ , \ 2^4 \ , \ 5^2 \ , \ 2^2 \times 5^2 \ , \ 2^4 \times 5^2$.

Les valeurs possibles de d sont donc

1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 20.

De la relation $m^2 = 2000 + 5d^2$, on voit alors que la seule possibilité pour d est $d = 10$, car bien sur, m doit être entier. Dans ce cas, la valeur de m est : $m = 50$.
Comme $ab = md$, on a alors $ab = 500$. Si on écrit $a = \mathrm{A}d$ et $b = \mathrm{B}d$ avec A et B premiers entre eux, alors on obtient :

$$\mathrm{AB}d^2 = 500 \text{ d'où, comme } d = 10 , \quad \mathrm{AB} = 5.$$

A et B sont premiers entre eux donc il n'y a que deux cas possibles à voir:

(A = 1 et B = 5) ou (A = 5 et B = 1).

Dans le premier cas, on a la solution $(a , b) = (10 , 50)$
Dans le second cas , on la solution $(a , b) = (50 , 10)$.
Pour l'équation : $m^2 - 7d^2 = 2000$, on utilise la même démarche et on constate qu'il n'y a pas de solution.

Exercice 9

a) On sait que $\mathrm{PGCD}(U_n,U_p)=\mathrm{PGCD}(U_n,U_{p+n})$, donc en particulier:
$\mathrm{PGCD}(U_n,U_0)=\mathrm{PGCD}(U_n,U_{0+n}) = \mathrm{PGCD}(U_n,U_n)=U_n$.
Ceci implique bien sur que U_n est un diviseur de U_0.

b) Posons $n = qp + r$ avec q entier et r dans $\{0;1;..;p-1\}$.C'est la division euclidienne de n par p.
On a : $\mathrm{PGCD}(U_p,U_r) = \mathrm{PGCD}(U_p , U_{p+r}) = \mathrm{PGCD}(U_p , U_{2p+r}) = ... = \mathrm{PGCD}(U_p , U_{qp+r})$.
D'où $\mathrm{PGCD}(U_p,U_r) = \mathrm{PGCD}(U_n,U_p)$ où r est le reste de la division euclidienne de n par p.
On retrouve alors le principe de l'Algorithme d'Euclide de recherche du PGCD.
On pose $d = \mathrm{PGCD}(n , p)$. d est le dernier reste non nul obtenu dans cet algorithme.
On a donc : $\mathrm{PGCD}(U_n,U_p) = \mathrm{PGCD}(U_d,U_0)$.
Or, $\mathrm{PGCD}(U_d,U_0) = U_d$ (voir question précédente) d'où on a bien
$\mathrm{PGCD}(U_n,U_p) = \mathrm{PGCD}(U_d,U_0) = U_d$ où $d = \mathrm{PGCD}(n , p)$