Exercices sur les congruences

EXERCICE 1

Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8. Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $3^n.n - 9n + 2$ soit divisible par 8?

EXERCICE 2

Montrez que pour tout entier naturel n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

EXERCICE 3

Montrez que pour tout couple d'entiers relatifs (a , b), si a et b ne sont pas divisibles par 7 alors $a^2 + b^2$ n'est pas divisible par 7. Montrez que pour tout n entier naturel, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

EXERCICE 4

Déterminez l'ensemble des x entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7.

EXERCICE 5

Pour n entier , n > 0 , on pose $U_n = 1! + 2! + 3! + ... + n!$

a) Montrez que $n \geq 5$ si et seulement si $n!$ est divisible par 10.

b) Montrez que $n \geq 10$ si et seulement si $n!$ est divisible par 100.

c) Montrez que $n \geq 14$ si et seulement si $n!$ est divisible par 49.

d) Montrez qu'il existe un entier no tel que pour tout $n > no$, $U_n = U_{no}$ modulo 10.

e) Montrez que qu'il existe un entier n_1 tel que pour tout $n > n_1$, $U_n = 47$ modulo 49.

EXERCICE 6

Montrez que pour tout entier $n \geq 1$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 en effectuant un raisonnement par récurrence puis en faisant une démonstration directe.

Corrections Congruences

Exercice 1

L'idée, dans ce style de question, est que les restes dans la division euclidienne par A sont des entiers positifs strictement inférieurs à A.
Donc, dans la suite des puissances d'un entier N quelconque, il y a toujours deux puissances ayant même reste et il y a nécessairement une puissance de N qui soit congru à N modulo A.
Le plus simple dans cet exercice, est alors de faire défiler les puissances de 3 modulo 8.
On obtient alors:

$3 = 3$ modulo 8
$3^2 = 9$ et $3^2 \equiv 1$ modulo 8
$3^3 = 27$ et $3^3 \equiv 3$ modulo 8
$3^4 = 81$ et $3^4 \equiv 1$ modulo 8 etc , etc ...

Les restes possibles par la division euclidienne de 3^n par 8 sont donc 1 ou 3 suivant que n soit pair ou impair.

On veut maintenant l'ensemble des n entiers naturels tels que $3^n.n - 9n + 2$ soit divisible par 8.
On cherche l'ensemble des n entiers naturels tels que " $3^n.n - 9n + 2 \equiv 0$ modulo 8 "
D'après le résultat précédent, on a 2 cas à étudier: n pair et n impair.

- Cas n pair:
  Comme dans ce cas, $3^n \equiv 1$ modulo 8, on peut écrire que :
  $n - 9n + 2 = 0$ modulo 8 ou encore $-8n + 2 \equiv 0$ modulo 8 ou encore $2 \equiv 0$ modulo 8.
  C'est impossible, donc pas de solution avec n pair.
- Cas n impair:
  Comme dans ce cas, $3^n \equiv 3$ modulo 8, on peut écrire :
  $3n - 9n + 2 \equiv 0$ modulo 8 , ou encore , $-6n + 2 \equiv 0$ modulo 8 , ou encore ,
  $2n + 2 \equiv 0$ modulo 8 , ou encore , $2(n+1) \equiv 0$ modulo 8.
  Or, $2(n+1) \equiv 0$ modulo 8 <=> $2(n+1) = 8k$ avec k dans **Z**.
  $2(n+1) = 8k$ <=> $(n+1) = 4k$ <=> $n+1 \equiv 0$ modulo 4 <=> $n \equiv 3$ modulo 4
  $n \equiv 3$ modulo 4 <=> $n \equiv 3$ modulo 8 ou $n \equiv 7$ modulo 8.
  n est donc de la forme $n = 8K + 3$ ou $n = 8K + 7$, où K est un entier naturel.
  n est bien impair.

Conclusion
L'ensemble des entiers naturels n tels que $3^n.n - 9n + 2$ est formé est entiers de la forme **(8K + 3)** ou **(8K + 7)** où K est un entier naturel.

Exercice 2

Montrez que pour tout entier naturel n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Méthode1:raisonnement par récurrence (à faire)

Méthode 2:congruences.

On veut ici vérifier que $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est congru à 0 modulo 11.

Or : $3^{n+3} - 4^{4n+2} = 3^3 \times 3^n - 4^2 \times (4^4)^n$

$3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 5.3^n - 5.3^n$ modulo 11 car $3^3 \equiv 5$ [11] , $4^2 \equiv 5$ [11] et $4^4 \equiv 3$[11]

$3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0$ modulo 11.

Il ne reste plus qu'à conclure.

Exercice3

Le principe de la congruence modulo 7, fait que les questions de divisibilités peuvent être traitées en étudiant uniquement les cas où les paramètres qui interviennent sont compris entre 0 et 6.Dans le cadre de cet exercice, dire que a et b ne sont pas divisibles par 7 revient seulement à dire qu'ils sont congrus à des entiers A et B compris entre 1 et 6.Si on fait la liste des carrés de ces entiers modulo 7, on obtient alors:

- $1^2 \equiv 1$ modulo 7
- $2^2 \equiv 4$ modulo 7
- $3^2 \equiv 2$ modulo 7
- $4^2 \equiv 2$ modulo 7
- $5^2 \equiv 4$ modulo 7
- $6^2 \equiv 1$ modulo 7

On constate alors que les carrés modulo 7 sont

- $1 \equiv 1^2 \equiv 6^2$ modulo 7
- $2 \equiv 4^2 \equiv 3^2$ modulo 7
- $4 \equiv 2^2 \equiv 5^2$ modulo 7

Aucune somme de deux de ces carrés ne peut donc être congrue à 0 modulo 7.
Donc, si a et b sont non divisibles par 7, la somme $a^2 + b^2$ n'est pas divisible par 7.

Maintenant, en utilisant les diverses propriétés des congruences (compatibilité avec la somme et le produit), on peut écrire que, à modulo 7 près, on a:

- $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3(3^2)^n + 2^2.2^n$
- $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 3.2^n + 4.2^n$ modulo 7
- $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 7.2^n$ modulo 7
- $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0$ modulo 7

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est bien divisible par 7 pour tout entier naturel n.

Exercice 4

$x^2 + 3x$ est divisible par 7 si et seulement si $x^2 + 3x \equiv 0$ modulo 7.
Ou encore si et seulement si $x(x+3) \equiv 0$ modulo 7.

Or, 7 est premier donc d'après le théorème de Gauss, il ne peut diviser un produit d'entiers que si il divise au moins un de ces entiers.
On a donc:

$x(x+3) \equiv 0$ modulo 7 si et seulement si $x \equiv 0$ modulo 7 ou $(x + 3) \equiv 0$ modulo 7.

Ce qui peut s'écrire: $x \equiv 0$ modulo 7 ou $x \equiv 4$ modulo 7.

Les entiers relatifs x tels que $x^2 + 3x$ soit divisible par 7 sont donc les entiers de la forme 7K ou de la forme 7K + 4 , où K est un entier relatif quelconque.

Exercice 5

Il faut revenir à la définition de n! et à la décomposition en facteurs premiers.
n! = 1.2.3.....(n-1).n et de plus un entier est divisible par 10 si et seulement si il est divisible par 2 et par 5.

a) n! est divisible par 10 si et seulement si dans sa décomposition en facteurs premiers, 2 et 5 ont des exposants non-nuls.
Or 1! = 1 , 2! = 2 , 3! = 2.3 , 4! =2.3.4 et 5! = 2.3.4.5 et pour n > 5 , n! = 2.3.4.5.K où K est un entier
On a donc bien n! divisible par 10 si et seulement si $n \geq 5$.

b) Un nombre est divisible par 100 si et seulement si dans sa

décomposition en facteurs premiers, 2 et 5 ont des exposants supérieure ou égale à 2. ($100 = 2^2 . 5^2$)
Or, par définition de n! , on a :
$n! = 2^2.5^2.K$ où K est un entier si et seulement si $n \geq 10$.
Pour le voir, on peut écrire tous les n! jusqu'à n = 10, mais on peut aussi réfléchir un peu.

c) C'est la même question que b). n! est divisible par $49 = 7^2$ si et seulement si 7 apparait avec un exposant $\geq$ à 2 dans la décomposition en facteurs premiers de n!
Cela ne signifie rien d'autre que $n \geq 14$ $(14 = 2.7)$

d) On sait que n! est divisible par 10 si et seulement si $n \geq 5$. Cela signifie que
$n! \equiv 0$ modulo 10 si et seulement si $n \geq 5$.
Donc pour $n \geq 4$, on a $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! +...+ n! = 1+ 2! + 3! + 4!$ modulo 10
Donc, pour no=4, on a bien $U_n \equiv U_4$ si $n \geq 4$.
Cela ne signifie rien d'autre que l'écriture en base 10 de Un finit par un chiffre constant pour $n \geq 4$.
On peut être tenté de faire un calcul "machine" pour trouver ce chiffre. C'est particulièrement maladroit, et en plus, cela suppose que l'on fait une confiance aveugle à sa calculette et on passe encore une fois à côté d'un phénomène très général.
$1! \equiv 1$ modulo 10
$2! \equiv 2$ modulo 10
$3! \equiv 6$ modulo 10
$4! \equiv 4$ modulo 10
donc $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2+ 6 + 4 = 13 \equiv 3$ modulo 10
Donc pour $n \geq 4$, U_n finit avec un 3 dans son écriture en base 10.

e) C'est la même question. On sait que $n! \equiv 0$ modulo 49 si et seulement si $n \geq 14$.
Donc $1! + 2! + 3! +4! +....+ n! = 1! + 2! + 3! + 4! + ...+ 13!$ pour $n \geq 13$.
Comme pour la question f), cela signifie qu'il finit par un chiffre constant pour $n \geq 13$ en base 49.

Exercice 6

On demande de démontrer cette question de deux façons.

- Par Récurrence

  Appelons P(n) la propriété suivante : "$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17".

  Pour n = 1, la propriété s'écrit : P(1) : "3.5 + 2 est divisible par 17"

  Comme 3.5 + 2 = 17 , on en déduit que P(1) est vraie.

  Faisons alors l'hypothèse de récurrence P(n), n étant un entier $\geq$ 1..

  On suppose donc que "$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17"

  Alors, cette hypothèse s'écrit plus simplement "$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2} \equiv 0$ modulo 17"

  On a donc:

$$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2} \equiv 0 \text{ modulo } 17 \text{ donc}$$
$$25.(3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}) \equiv 0 \text{ modulo } 17 \text{ donc}$$
$$3.5^{2n+1} + 25.2^{3n-2} \equiv 0 \text{ modulo } 17 \text{ donc}$$

  On remarque alors que

  $25 \equiv 8$ modulo 17 et que

  $8 = 2^3$ donc

$$3.5^{2n+1} + 25.2^{3n-2} \equiv 3.5^{2n+1} + 2^3.2^{3n-2} \text{ modulo } 17$$
$$\equiv 3.5^{2n+1} + 2^{3n+1} \text{ modulo } 17$$

  D'où :

$$3.5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0 \text{ modulo } 17$$
$$3.5^{2(n+1)-1} + 2^{3(n+1)-2} \equiv 0 \text{ modulo } 17$$

Cette dernière égalité est la propriété P(n+1).

Conclusion:

P(1) est vraie et pour tout n $\geq$ 1, On a P(n) $\Rightarrow$ P(n+1).

Par récurrence, la propriété est donc vraie pour tout n $\geq$ 1.

- Démonstration Directe

  Cherchez!! Ou allez voir les autres exercices du même type