



Le barème est approximatif.

Exercice 1 (5 points) :

1. (a) Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y' + 2y = 0$$

- (b) En déduire les solutions de $y'' + 2y' = 0$.

2. (a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ae^{-x} + b$ soit solution de

$$(E') : y' + 2y = 2e^{-x} - 6$$

- (b) Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E) .

- (c) En déduire la résolution de l'équation (E') .

3. Déterminer la solution s de (E') vérifiant $s(\ln 2) = -\frac{7}{4}$.

Exercice 2 (4 points) :

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E) : xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2.$$

1. (a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' = 2y + 8$.

- (b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E) .

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E) .

3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln 2 ; 0)$? Si oui la préciser.

Exercice 3 (5 points) :

f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. g est définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - x - 1$.

- (a) Etudiez les variations de g et en déduire son signe.

- (b) Justifier alors le domaine de définition de f .

2. (a) Calculez les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interprétez graphiquement les résultats obtenus.

- (b) Etudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.

- (c) Soit T la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0. Etudiez la position relative de \mathcal{C} et de T .

Exercice 4 (2 points) :

Résoudre les équation suivantes :

1. $2iz + 3i = \bar{z} + 1$

2. $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

Exercice 5 (3 points) :

Soit $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

1. Déterminer une forme exponentielle de z_1 .

2. Déterminer une forme exponentielle de z_2 .

3. Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.

4. Donner une forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$ et en déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 6 (1 points) :

Ecrivez sous forme exponentielle.

1. $a = -ie^{i\frac{\pi}{3}}$

2. $b = (1 + i\sqrt{3})^4$

① a) $y' + 2y = 0$ est une eq de la forme $y' = ay$

les solutions sont donc les fonctions de la forme $f(x) = K e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$.

b) $y'' + 2y' = 0$; si f solution de (E'), alors $f'' + 2f' = 0$

d'où $(f')' + 2(f') = 0 \Leftrightarrow f'$ solution de (E)

d'où f' est de la forme $f'(x) = K e^{-2x}$, $K \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Donc f est une primitive de f' : $f(x) = -\frac{K}{2} e^{-2x} + K'$, $K, K' \in \mathbb{R}$

(réciproquement, il est clair que une telle fonction est solution de (E))

d'où: les solutions de (E) sont les $f^0: x \mapsto K e^{-2x} + K'$, $x \in \mathbb{R}$, K, K' constante

② a) $g(x) = a e^{-x} + b$; $x \in \mathbb{R}$

g dérivable d'après la règle de dérivation donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -a e^{-x}$

g solution de (E') $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) + 2g(x) = 2e^{-x} - 6$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -a e^{-x} + 2a e^{-x} + 2b = 2e^{-x} - 6$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad a e^{-x} + 2b = -6 + 2e^{-x}$$

d'où par identification $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $a = 2$ et $b = -3$.

Donc $g(x) = 2e^{-x} - 3$.

b) $f - g$ solution de (E) $\Leftrightarrow f' - g' + 2(f - g) = 0$

$$\Leftrightarrow f' + 2f = g' + 2g$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + 2f(x) = 2e^{-x} - 6$$

$$\Leftrightarrow f \text{ solution de (E')}$$

c) d'après ce qui précède

f solution de (E') $\Leftrightarrow f - g$ solution de (E)

$$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = K e^{-2x}, K \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow f$ de la forme, $f(x) = K e^{-2x} + g(x)$, $K \in \mathbb{R}$

c'est-à-dire $f(x) = K e^{-2x} + 2e^{-x} - 3$, $K \in \mathbb{R}$.

③ $f(\ln 2) = -7/4$

$$\Leftrightarrow K \times 2^{-2} + 2 \times 2^{-1} - 3 = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{K}{4} = -\frac{7}{4} + 2$$

$$\Leftrightarrow \underline{K = 1}$$

d'où $\underline{h(x) = e^{-2x} + 2e^{-x} - 3}$

II) ① a, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ et f solution de (E).

f est dérivable, g dérivable et donc $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -\frac{f(x)}{x^2} + \frac{f'(x)}{x}$

Vérifions que g solution de (E')

$$f \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow x f'(x) - 2x f(x) - f(x) = 8x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x^2} - 2 \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = 8 \quad (\div x^2; x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 8 + 2 \frac{f(x)}{x}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 8 + 2g(x) \Leftrightarrow g \text{ solution de (E')}$$

② Nous l'avons déjà montré dans la question précédente: la sol de (E')
 mais si $f(x) = x h(x)$, on a bien $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ et d'après ce qui précède
 f solution de (E).

③ (E'): $y' = 2y + 8$ est une équation de la forme $y' = ay + b$

les solutions sont donc les f de la forme $f(x) = K e^{2x} - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$

d'après ce qui précède, f solution de (E) $\Leftrightarrow g(x) = \frac{f(x)}{x}; x > 0$
 est solution de (E')

d'où $\frac{f(x)}{x}$ est de la forme $g(x) = K e^{2x} - 4; x > 0 \quad K \in \mathbb{R}$

donc $f(x) = x K e^{2x} - 4x; x > 0$ sont les solutions de (E)

③ Soit C la représentation graphique de f

$$A \in C \Leftrightarrow f(hz) = 0 \Leftrightarrow hz K x 2^2 - 4hz = 0$$

$$\Leftrightarrow K = 1$$

la solution cherchée est $f(x) = x e^{2x} - 4x; x > 0$

III) ① $g(x) = e^x - x - 1; x \in \mathbb{R}$

② g dérivable sur \mathbb{R} d'après les règles de dérivation

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 1$$

et donc $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ d'où le tableau de variation de g

x	
$g'(x)$	- 0 +
$g(x)$	

$$\text{et } g(0) = 0$$

donc g admet pour minimum 0

c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.

$$b) g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 > 0$$

d'où f définie sur \mathbb{R}

$$2) a) f(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0 \text{ par inverse}$$

donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = -1 \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -1$$

donc $y = -1$ est asymptote horizontale à $-\infty$.

b) f dérivable d'après les règles de dérivation et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0; (e^x - x)^2 > 0 \Rightarrow$ le signe de f' est celui de $1-x$.

On déduit le tableau de variation de f :

x		1	
f'	+	0	-
$f(x)$		$\nearrow \frac{1}{e-1}$	$\searrow 0$
		-1	

c) T a pour équation:

$$T: y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\Rightarrow T: y = x$$

Soit $h(x) = f(x) - x, x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{-xe^x + x^2 - x}{e^x - x} = \frac{-xg(x)}{e^x - x}$$

Le signe de h est donc celui de $-x$ car $g(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

d'où pour $x > 0, h(x) < 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ est en dessous de T
pour $x < 0, h(x) > 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ est au dessus de T

iv) a) Soit $z = x + iy; (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$2iz + 3i = \bar{z} + 1 \Leftrightarrow 2i(x + iy) + 3i = x - iy + 1$$

$$\Leftrightarrow -2y - x - 1 + i(2x + 3 + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \quad (\text{car les parties réelles et imaginaires sont nulles})$$

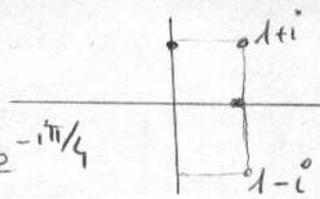
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 1 \\ x = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases} \text{ donc } S = \left\{ -\frac{5}{3} + \frac{i}{3} \right\}$$

$$b) z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$

$$\Delta = 8 - 16 = -8 \Rightarrow \text{on a deux solutions } z_1 = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = \sqrt{2}(1+i)$$

$$\text{et } z_2 = \sqrt{2}(1-i)$$

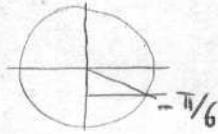
et $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$; $1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$



d'autres solutions sont $z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$; $z_2 = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$

(V) a) $|z_1|^2 = 8 \Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow z_1 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$
 $= 2\sqrt{2} e^{-i\pi/6}$



b) $z_2 = 2 - 2i$
 $= 2(1-i) = 2\sqrt{2} e^{-i\pi/4}$

c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(2+2i)}{8} = \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})}{8} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$

d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2} e^{-i\pi/6}}{2\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} = e^{i(\pi/4 - \pi/6)} = e^{i\pi/12} = \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

donc par identification des parties réelles et imaginaires

$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(VI) a) $a = -ie^{i\pi/3} = e^{-i\pi/2} e^{i\pi/3} = e^{-i\pi/6}$
 $b = (1+i\sqrt{3})^4 = 2^4 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4$
 $= 2^4 (e^{i\pi/3})^4 = 16 e^{4i\pi/3}$