Devoir surveillé de mathématiques

Terminales S –

L'usage d'une calculatrice est autorisé.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 — 6 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

1. *Question de cours*
   Prérequis : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$. »
   Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.
   a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right) \quad (2\pi)$.
   b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.
2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives
   $$z_A = 4 + \mathrm{i}, \quad z_B = 1 + \mathrm{i}, \quad z_C = 5\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_D = -3 - \mathrm{i}$$
   Placer ces points sur une figure.
3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
   $$z' = (1 + 2\mathrm{i})z - 2 - 4\mathrm{i}$$
   a. Préciser les images des points A et B par f.
   b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.
4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :
   $$z' - z = -2\mathrm{i}(2 - \mathrm{i} - z)$$
   b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right)$.
   c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?
   d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. Écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

Exercice 2 — 6 points

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe.
Soit A le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que
$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right)$$

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.
   a. Démontrer les égalités suivantes :
   $$x' = \frac{1}{2}(x + y) \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{2}(x + y)$$
   En déduire que le point M' appartient à la droite (OA).

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2. M_1 est le point d'affixe $z_1 = \mathrm{i}z$, M_2 le point d'affixe $z_2 = \overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

   a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4+\mathrm{i}$. Placer les points M, M_1, M_2, M_3.

   b. Exprimer z_3 en fonction de z.

   c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

   d. Vérifier que $z' - z = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}z_3$. En déduire que $MM' = \dfrac{1}{2}OM_3$.

3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \dfrac{1}{2}OM$.

   Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

Exercice 3 — 8 points

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$.

   Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle :

   $$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$

   b. Résoudre l'équation différentielle (E').

   c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

Devoir surveillé de mathématiques

Terminales S –

Exercice 1

1. Cf. cours.
2. Dessin
3. a. On obtient $z_{A'} = 5\mathrm{i} = z_C$ et $z_{B'} = -3-3\mathrm{i} = z_D$.

   b. $M(z)$ est invariant par f si et seulement si $z' = z \Leftrightarrow z = (1+2\mathrm{i})z - 2 - 4\mathrm{i} \Leftrightarrow 2\mathrm{i}z = 2+2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 2-\mathrm{i}$. L'équation ayant une seule solution, f a un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = 2-\mathrm{i}$.
4. a. On a $z' - z = 2\mathrm{i}z - 2 - 4\mathrm{i} = -2\mathrm{i}(2-\mathrm{i}-z)$.

   b. L'égalité ci-dessus donne :
   $$\frac{z'-z}{2-\mathrm{i}-z} = -2\mathrm{i}$$
   On obtient donc :
   - $\dfrac{MM'}{\Omega M} = \left|\dfrac{z'-z}{2-\mathrm{i}-z}\right| = |-2\mathrm{i}| = 2$
   - $\left(\overrightarrow{M\Omega},\ \overrightarrow{MM'}\right) = \arg\left(\dfrac{z'-z}{2-\mathrm{i}-z}\right)\ (2\pi) = \arg(-2\mathrm{i})\ (2\pi) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

   c. On en déduit que le triangle $\Omega MM'$ est un triangle rectangle en M.

   d. On a $|z_E|^2 = \sqrt{1+3} = 2$ puis $\cos\theta_E = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta_E = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   On en déduit $\theta_E = -\dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

   Donc $z_E = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

   Pour placer le point E, il suffit de construire le cercle de centre O et de rayon 2. Le point E est le point de ce cercle d'abscisse 1.

   D'après les questions b. et c. on a $EE' = 2\Omega E$ et $\left(\overrightarrow{E\Omega},\ \overrightarrow{EE'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$. On construit donc la perpendiculaire en E à la droite $(E\Omega)$ et on place sur cette droite le point E' tel que $EE' = 2\Omega E$ et $\left(\overrightarrow{E\Omega},\ \overrightarrow{EE'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Exercice 2

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.

   a. Par définition : $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right)$, c'est-à-dire :
   $$x' + \mathrm{i}y' = \frac{1}{2}(x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)) = \frac{1}{2}(x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}x+y) = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x+y)\mathrm{i} \qquad (1)$$
   En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les égalités annoncées.

   On en déduit que $y' = x'$ donc que M' appartient à la droite d'équation $y = x$. Or O et A appartiennent aussi à cette droite, d'où $M' \in (OA)$.

   b. $M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x+y) \\ y = \frac{1}{2}(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x+y \\ 2y = x+y \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$

   L'ensemble cherché est donc la droite (OA).

c. L'égalité (1) permet d'obtenir : $z' - z = \cdots = \frac{1}{2}(x-y)(-1+\mathrm{i})$.

On en déduit :
$$\frac{z'-z}{z_A} = \frac{1}{2}(x-y)\frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(x-y)\frac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \cdots = \frac{1}{2}\mathrm{i}(x-y)$$
Donc $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{MM'}) = \arg\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}(x-y)\right) \ (2\pi) = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$ donc $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{OA}$.

2. a. Dessin

b. Par définition du point M_3, $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_2}$, donc $z_3 - z_1 = z_2 - 0$, ce qui donne : $z_3 - \mathrm{i}z = \overline{z}$, c'est-à-dire $z_3 = \mathrm{i}z + \overline{z}$.

c. On a : $OM_1 = |z_1| = |\mathrm{i}z| = |i| \times |z| = |z|$;
$OM_2 = |\overline{z}| = |z|$.
Le parallélogramme $OM_1M_3M_2$ a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un losange.

d. $z' - z = \frac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right) - z = \frac{1}{2}\left(z + i\overline{z} - 2z\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{i}\overline{z} - z\right)$.
Par ailleurs, $\frac{1}{2}\mathrm{i}z_3 = \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\mathrm{i}z + \overline{z}\right) = \frac{1}{2}\left(-z + \mathrm{i}\overline{z}\right)$, on a donc bien $z' - z = \frac{1}{2}\mathrm{i}z_3$.
On en déduit que $|z' - z| = \left|\frac{1}{2}\mathrm{i}z_3\right| = \frac{1}{2} \times |\mathrm{i}| \times |z_3| = \frac{1}{2}|z_3|$, c'est-à-dire que $MM' = \frac{1}{2}OM_3$.

3. On a déjà $OM = OM_1 = OM_2 = |z|$, les points M, M_1 et M_2 sont donc sur un même cercle de centre O. M_3 appartient à ce cercle si et seulement si $OM_3 = OM$ c'est-à-dire (d'après la question 2d) si et seulement si $MM' = \frac{1}{2}OM$.
Le triangle OMM' est rectangle en M' ; en effet $M' \in (OA)$ et $(MM') \perp (OA)$ (question 1), on a donc :
$$\sin\widehat{M'OM} = \frac{MM'}{OM} = \frac{\frac{1}{2}OM}{OM} = \frac{1}{2}$$
On en déduit que $\widehat{M'OM} = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 3

Partie A

1. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f(x) = 20x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 10\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = -40 \times -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 10\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = 0$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = 0$.
On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. f est dérivable sur $I = [0\,;+\infty[$ (composée et produit de fonctions dérivables) et, pour tout x de I : $f'(x) = (20 - 10x - 5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = (15 - 10x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ qui est du signe de $(15 - 10x)$ car $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$. Cette dérivée s'annule en $\frac{3}{2}$. D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)$	0	$\nearrow$	$40\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$	$\searrow$	0

3. Sur $\left]0\,;\frac{3}{2}\right]$, $f(x) > 10$, donc l'équation $f(x) = 10$ n'a pas de solution. Sur l'intervalle $\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$, on applique (en le rédigeant) le théorème de la bijection. Il existe donc un réel unique $\alpha \in \left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$ tel que $f(x) = 10$. La calculatrice donne $\alpha \approx 4{,}673$.

Partie B

1. On a effectivement $f(t)+\dfrac{1}{2}f'(t)=(15-10t)\text{e}^{-\frac{1}{2}t}+(10t+5)\text{e}^{-\frac{1}{2}t}=20\text{e}^{-\frac{1}{2}t}$. Donc f est une solution de (E) sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. a. $\forall t \in\,]0\,;\,+\infty]$, $(g-f)'(t)+\dfrac{1}{2}(g-f)(t)=g'(t)-f'(t)+\dfrac{1}{2}g(t)-\dfrac{1}{2}f(t)=\left(g'(t)+\dfrac{1}{2}g(t)\right)-\left(f'(t)+\dfrac{1}{2}f(t)\right)=20\text{e}^{-\frac{1}{2}t}-20\text{e}^{-\frac{1}{2}t}=0$

   Conclusion : la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle : (E') $y'+\dfrac{1}{2}y=0$.

   b. Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions $t\longmapsto C\text{e}^{-t/2}$.

   c. La fonction $(g-f)$ est l'une de ces solutions. Donc $g(t)=f(t)+C\text{e}^{-t/2}$. Or $g(0)=f(0)=10$ donc $C=0$. Ainsi $g=f$.

   Conclusion : l'équation différentielle (E) a une solution unique vérifiant $y'(0)=10$, c'est la fonction f de la **partie A**.

3. D'après la question **3.** de la partie A, cela correspond à la valeur α telle que $f(\alpha)=10$. On a vu que $\alpha\approx 4{,}673\text{h}\approx 4\text{ h }41\text{min}$.