Série arithmétique proposé par Dr Amine Touati

. Question 1

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{4} par 5 ? Justifier.

3. En déduire que $6^{40} \equiv 1$ [11] et que $6^{40} \equiv 1$ [5].

4. Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2. Question 2 1

Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

1. Montrer que l'équation : (E) $65x - 40y = 1$, n'a pas de solution.

2. Montrer que l'équation : (E') $17x - 40y = 1$, admet au moins une solution.

3. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

4. Résoudre l'équation (E').

En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1$ [40].

3. Question 3

Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b$ [55] et si $a^{40} \equiv 1$ [55], alors $b^{33} \equiv a$ [55].

1 Question 1

1. 11 est un nombre premier et 11 ne divise pas 6. D'après le petit théorème de Fermat, on a : $6^{10} \equiv 1[11]$. Donc le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 est 1.

2. 5 est un nombre premier et 5 ne divise pas 6. D'après le petit théorème de Fermat, on a : $6^{4} \equiv 1[5]$. Donc le reste de la division euclidienne de 6^{4} par 5 est 1.

3. $6^{40} = (6^4)^{10}$ donc $6^{40} \equiv 1^{10}[11]$, c'est-à-dire $6^{40} \equiv 1[11]$. La démarche est identique pour prouver que $6^{40} \equiv 1[5]$.

4. D'après ce qui précède, $6^{40} - 1$ est divisible par 11 et par 5. Comme 11 et 5 sont premiers entre eux alors $6^{40} - 1$ est divisible par le produit de ces deux nombres, c'est-à-dire 55.

2 Question 2

1. $\mathrm{PGCD}(65;40) = 5$ .Comme 5 divise 65 et 40 alors 5 divise $65x - 40y$. Ce dernier nombre ne peut donc pas être égal à 1. On en déduit que l'équation (E) n'a pas de solution.

2. $\mathrm{PGCD}(17;40) = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs $(x;y)$, tel que $17x - 40y = 1$, c'est-à-dire que l'équation (E') admet au moins une solution.

3. L'algorithme d'Euclide s'écrit :

   $40 = 2 \times 17 + 6; 17 = 2 \times 6 + 5; 6 = 1 \times 5 + 1; 5 = 5 \times 1 + 0.$

   $6 = 40 - 2 \times 17; 5 = 17 - 2 \times 6 = 17 - 2 \times (40 - 2 \times 17) = 5 \times 17 - 2 \times 40; 1 = 6 - 5 = 40 - 2 \times 17 - (5 \times 17 - 2 \times 40) = 3 \times 40 - 7 \times 17.$

   Ainsi, le couple $(-7;-3)$ est solution de l'équation (E').

4. $17x - 40y = 1 \Longleftrightarrow 17x - 40y = -7 \times 17 + 3 \times 40 \Longleftrightarrow 17(x+7) = 40(y+3)$.

   Ainsi, 17 divise $40(y+3)$. Comme 17 et 40 sont premiers entre eux, alors, d'après le théorème de Gauss, 17 divise $y+3$. Par conséquent, il existe un entier relatif k tel que $y + 3 = 17k$, c'est-à-dire $y = 17k - 3$. On en déduit que $17(x+7) = 40 \times 17k$, c'est-à-dire que $x + 7 = 40k$, d'où $x = 40k - 7$.

   Les solutions de l'équation (E) sont donc les couples de la forme $(40k - 7; 17k - 3)$, où $k \epsilon \mathbb{Z}$.

   L'entier x_0 vérifie $17x_0 \equiv 1[40]$, lorsque x_0 est de la forme $40k - 7$. Le seul cas où x_0 est un entier naturel inférieur à 40 est obtenu pour $k = 1$, ce qui donne $x_0 = 33$.

$b^{33} \equiv (a^{17})^{33}[55]$. Or $17 \times 33 = 40 \times 14 + 1$, donc $(a^{17})^{33} = (a^{40})^{14} \times a^1$. Ainsi, $b^{33} \equiv 1^{14} \times a[55]$, c'est-à-dire $b^{33} \equiv a[55]$.

www.devoirat.net 2016