CONGRUENCES	**Série**	**Dr. Amine Touati**

Congruences

1. ■ Déterminer les restes de la division par 17 des entiers suivants :

29 ; 100 ; 2900 ; 2900^2 ; 2900^{20} ; 23^{2500} ; 16^{2523}

2. ■ Montrer que 89 divise $2^{44} - 1$.

3. ■ 1) Trouver le reste dans la division de 17^{17} par 7.
2) Trouver le reste dans la division de 4^{30} par 23.

4. ■ Trouver le reste dans la division de $1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$ par 45.

5. ■ 1) Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de 3^n ($n \in \mathbb{N}$).
2) En déduire le reste de la division euclidienne de 1998^{128} par 7.

Application à des problèmes de divisibilité

6. ■ 1)Vérifier les congruences suivantes : $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ et $3^6 \equiv 1 \pmod{13}$.
2) Montrer que $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13.

7. ■ 1) Démontrer que $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$. En déduire que $3^{3n} \equiv 1 \pmod{13}$.
2) Montrer que $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est un multiple de 13.

8. ■ 1) Montrer que $5^{6614} - 12^{857} \equiv 1 \pmod{7}$.

9. ■ Quels sont les entiers n tels que $n^6 - 1$ soit divisible par 9 ?

10. ■ 1) Pour k entier compris entre 0 et 9, déterminer le reste de la division euclidienne de k^5 par 10.
2) En déduire que pour tout n entier naturel, $n^5 - n$ est divisible par 10.
3) Déterminer sans calculatrice un entier n tel que : $n^5 = 8\,587\,340\,257$.

11. ■ 1) Donner le reste de la division de 4^4 par 11.
2) Étudier selon les valeurs de k le reste de la division de 4^k par 11, puis celui de 3^k par 11.
En déduire que $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

12. ■ Déterminer les entiers n tels que $2^n - 1$ soit divisible par 9.

13. ■ Soit (a,b) un couple d'entiers relatifs tel que 7 divise $a^2 + b^2$. Montrer que 7 divise a et que 7 divise b.

Autres utilisations des congruences

14. ■ 1) À quoi est congru modulo 4 le carré d'un entier naturel ?
2) En déduire que $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$ n'est jamais un carré, où p_i désigne le i^e nombre premier.

15. ■ Étudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de n^2 par 8
En déduire que la somme de deux carrés est ou bien paire, ou bien du type $4k + 1$.

16. ■ Résoudre dans � l'équation :

$$5^n + 2^n = 4^n + 3^n.$$

Que pensez-vous de la même équation lorsque l'inconnue est dans $\rightarrow_{+}^{*}$?

17. ■ a, b et c sont trois entiers relatifs. Montrer que, si $a^2 + b^2 = c^2$, alors abc est un multiple de 60.

18. ■ L'entier n a 6 chiffres et s'écrit $n = x1527y$. On sait que n est un multiple de 4 et que si on le divise par 11, le reste est égal à 5. Trouver n.

19. ■ Soit n un entier quelconque.
Montrer que $3n^2 + 3n + 7$ n'est jamais le cube d'un entier.

Équations avec congruences

20. ■ 1) Pour quelles valeurs de n a-t-on $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.
2) Résoudre dans l'équation $(n + 5)^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$.
3) Résoudre dans $(n + 2)(n + 4) \equiv 0 \pmod 8$.

21. ■ Trouver tous les entiers relatifs x tels que $3x \equiv 1 \pmod{11}$.
Trouver tous les entiers relatifs x tels que $5x \equiv 8 \pmod{20}$.

22. ■ Résoudre le système de congruences suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \pmod 4 \\ x \equiv 0 & \pmod 3 \\ x \equiv 5 & \pmod 7 \end{cases}$$

Congruences

23. ■ Une simple division euclidienne prouve que $29 \equiv 12 \pmod{17}$, tandis que $100 \equiv 15 \pmod{17}$.
On peut aussi écrire que $29 \equiv -5 \pmod{17}$ et $100 \equiv -2$.
Si bien que $2900 \equiv -5 \times -2 = 10 \pmod{17}$.
Par suite $2900^2 \equiv 10^2 \equiv 15 \pmod{17}$.
Remarquons que $2900^2 \equiv -2 \pmod{17}$ donc

$2900^4 \equiv 4 \pmod{17}$,

$2900^8 \equiv (2900^4)^2 \equiv 16 \equiv -1 \pmod{17}$,

$2900^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

On aurait pu retrouver ce résultat avec le petit théorème de Fermat.
De la même façon, le petit théorème de Fermat prouve que :

$23^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

Donc $23^{2500} = (23^{16})^{156} \equiv 1 \pmod{17}$.
Par ailleurs, $16 \equiv -1 \pmod{17}$, donc $16^{2523} \equiv (-1)^{2523} \equiv -1 \pmod{17}$.
Donc $2900^{20} = 2900^{16} \times 2900^4 \equiv 1 \times 4 \equiv 4 \pmod{17}$.

24. ■ Partons de $88 \equiv -1 \pmod{89}$.
Or $88 = 2^3 \times 11 \equiv -1 \pmod{89}$.
Cherchons une puissance de 11 qui soit modulo 89 congrue à une puissance de 2.

$11^2 \equiv 121 \equiv 32 \equiv 2^5 \pmod{89}$.

Donc :
$(2^3 \times 11)^2 \equiv 1 \pmod{89}$
$\equiv 2^6 \times 2^5 \equiv 2^{11} \pmod{89}$
Bilan : $2^{11} \equiv 1 \pmod{89}$, donc $2^{44} \equiv 1 \pmod{89}$, ce qui prouve que $2^{44} - 1$ est divisible par 89.

25. ■ 1) $17 \equiv 3 \pmod 7$; $17^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$; $17^3 \equiv 2 \times 3 \equiv 6 \equiv -1 \pmod 7$.
Donc $17^6 \equiv 1 \pmod 7$ et $17^{12} \equiv 1 \pmod 7$.
$17^{17} \equiv 17^{12} \times 17^5 \equiv 17^5 \equiv 17^3 \times 17^2 \equiv -2 \equiv 5 \pmod 7$.

2) $22 \equiv -1 \pmod{23}$. Or $22 = 2 \times 11$.
Cherchons une puissance de 11 qui soit une puissance de 2 modulo 23.

$11^2 = 121 \equiv 6 \pmod{23}$

$11^4 \equiv 13 \pmod{23}$

$11^8 \equiv 169 \equiv 8 \equiv 2^3 \pmod{23}$

$22^8 \equiv 2^8 \times 11^8 \equiv 2^{11} \equiv 1 \pmod{23}$.
Donc $2^{55} \equiv 1 \pmod{23}$ et $2^{60} \equiv 2^5 \equiv 9 \pmod{23}$
Donc le reste dans la division de 4^{30} par 23 est 9.

26. ■ Il est clair qu'une factorielle est multiple de 45 à partir d'un certain n, qu'il est possible de déterminer.
Comme $45 = 5 \times 3^2$, il suffira dans la factorielle de voir apparaître deux facteurs 3 et un facteur 5 : c'est le cas pour $6! = 1 \times 2 \times \mathbf{3} \times 4 \times \mathbf{5} \times \mathbf{6} = 720 = 45 \times 16$.
Par suite, pour n 6, $n!$ est divisible par 45.
Par suite :

$1!+2!+3!+...+100! \equiv 1!+2!+3!+4!+5! \equiv 1+2+6+24+120 \equiv 153 \equiv 18 \pmod{45}$.

27. ■ 1) $3 \equiv 3 \pmod 7$;

$3^2 \equiv 2 \pmod 7$;

$3^3 \equiv -1 \pmod 7$;

$3^4 \equiv -3 \equiv 4 \pmod 7$;

$3^5 \equiv -2 \equiv 5 \pmod 7$;

$3^6 \equiv 1 \pmod 7$.

Par suite, si $n = 6k + p$, avec $0 \mathbb{C} p \mathbb{C} 5$, $3^n \equiv 3^p \pmod 7$.
2) Comme $1998 = 2 \times 3^3 \times 37$, $1998^{128} = 2^{128} \times 3^{384} \times 37^{128}$.
$1998^{128} \equiv 2^{128} \times 3^{384} \times 2^{128} \equiv 2^{256} \times (3^6)^{64} \equiv 2^{256} \pmod 7$.
D'après le petit théorème de Fermat, on sait que $2^6 \equiv 1 \pmod 7$.
Comme $256 = 6 \times 42 + 4$, on a : $2^{256} \equiv (2^6)^{42} \times 2^4 \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7$.

Application à des problèmes de divisibilité

28. ■ 1) $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$: cette congruence résulte du petit théorème de Fermat.

Par ailleurs,

$3 \equiv 3 \pmod{13}$

$3^2 \equiv 9 \pmod{13}$

$3^3 \equiv 27 \equiv 1 \pmod{13}$

donc $3^6 \equiv (3^3)^2 \equiv 1 \pmod{13}$.

2) Par suite :

$2^{60} = (2^{12})^5 \equiv 1 \pmod{13}$

$2^{70} \equiv 2^{10} \equiv 1024 \equiv 10 \pmod{13}$.

De même

$3^{70} \equiv 3^{69} \times 3 \equiv (3^3)^{23} \times 3 \equiv 3 \pmod{13}$.

Si bien que $2^{70} + 3^{70} \equiv 10 + 3 \equiv 13 \equiv 0 \pmod{13}$. Donc $2^{70} + 3^{70}$ est bien divisible par 13.

29. ■ 1) $3^3 \equiv 27 \equiv 1 \pmod{13}$. Donc $(3^3)^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{13}$.

2) Par suite

$$\begin{aligned} 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 &\equiv 3^{3n} \times 3^{3n} \times 3^2 + 3^{3n} \times 3 + 1 \\ &\equiv 9 + 3 + 1 \\ &\equiv 13 \equiv 0 \pmod{13}. \end{aligned}$$

30. ■ $5^6 \equiv 1 \pmod 7$ d'après le petit théorème de Fermat.

Comme $6614 = 6 \times 1102 + 2$, on a :

$5^{6614} \equiv (5^6)^{1102} \times 5^2 \equiv 5^2 \equiv 25 \equiv 4 \pmod 7$.

$12 \equiv 5 \pmod 7$ donc $12^{857} \equiv 5^{857} \equiv (5^6)^{142} \times 5^5 \equiv 5^5 \equiv (-2)^5 \equiv -32 \equiv 3$ (mod 7).

Si bien que $5^{6614} - 12^{857} \equiv 4 + 3 \equiv 0 \pmod 7$.

31. ■ On peut faire une recherche préalable à la calculatrice :

Si $n \equiv \pm 1 \pmod 9$, alors $n^6 \equiv 1 \pmod 9$ donc $n^6 - 1$ est bien divisible par 9.

Si $n \equiv \pm 2 \pmod 9$, alors $n^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 9$ donc $n^6 - 1$ est bien divisible par 9.

Si $n \equiv \pm 4 \pmod 9$, alors $n^6 \equiv 4^6 \equiv 4096 \equiv 1 \pmod 9$ donc $n^6 - 1$ est bien divisible par 9.

Si $n \equiv 0 \pmod 9$, alors $n^6 \equiv 0 \pmod 9$ donc $n^6 - 1$ n'est pas divisible par 9.

Si $n \equiv \pm 3 \pmod 9$, alors $n^6 \equiv 0 \pmod 9$ –il est en effet clair que n^6 est un multiple de 9 donc $n^6 - 1$ n'est pas divisible par 9.

32. ■ 1) Si $k \equiv 0 \pmod{10}$, alors $k^5 \equiv 0 \pmod{10}$.

Si $k \equiv 1 \pmod{10}$, alors $k^5 \equiv 1 \pmod{10}$.

Si $k \equiv 2 \pmod{10}$, alors $k^5 \equiv 2^5 \equiv 32 \equiv 2 \pmod{10}$.

Si $k \equiv 3 \pmod{10}$, alors $k^5 \equiv 3^5 \equiv 243 \equiv 3 \pmod{10}$.

Si $k \equiv 4 \pmod{10}$, alors $k^5 \equiv 4^5 \equiv 1024 \equiv 4 \pmod{10}$.

Si $k \equiv 5 \pmod{10}$, alors $k^5 \equiv 5^5 \equiv 3125 \equiv 5 \pmod{10}$.

Si $k \equiv 6 \equiv -4 \pmod{10}$, alors $k^5 \equiv (-4)^5 \equiv -4^5 \equiv -4 \equiv 6 \pmod{10}$.

Si $k \equiv 7 \equiv -3 \pmod{10}$, alors $k^5 \equiv (-3)^5 \equiv -3^5 \equiv -3 \equiv 7 \pmod{10}$.

Si $k \equiv 8 \equiv -2 \pmod{10}$, alors $k^5 \equiv (-2)^5 \equiv -2^5 \equiv -2 \equiv 8 \pmod{10}$.

Si $k \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$, alors $k^5 \equiv (-1)^5 \equiv -1^5 \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$.

Autrement dit un nombre entier et sa puissance 5^e ont même chiffre des unités. On peut aussi dire qu'ils sont congrus leur chiffre des unités modulo 10.

Autre façon de procéder

Il est clair que :

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n\left(n^4 - 1\right) = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right) = n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n^2 + 1\right) \\ &= n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(\left(n^2 - 4\right) + 5\right) = n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n^2 - 4\right) + 5n\left(n-1\right)\left(n+1\right) \\ &= \left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right) + 5n\left(n-1\right)\left(n+1\right) \end{aligned}$$

Ce nombre est divisible par 5 comme somme de deux termes divisibles par 5, le premier parce que c'est le produit de 5 termes consécutifs, dont un forcément est un multiple de 5, et le second de façon immédiate.

C'est aussi un nombre divisible par 2, comme somme de deux termes divisibles par 2, pour des raisons analogues.

$n^5 - n$ est donc toujours un multiple de 10…

2) Il en résulte immédiatement que, pour tout n entier naturel, $n^5 - n$ est divisible par 10.

3) Il est clair que cet entier se termine par un 7.

Par ailleurs, $n^5 \;\mathbb{C}\; 10^{10}$ donc $n \;\mathbb{C}\; 10^2$.

Le nombre étant proche de 10^{10}, on peut penser qu'il est proche de 100.

On peut proposer 97, qui est bien le bon résultat.

33. ■ 1) $4^4 = 256 \equiv 3 \pmod{11}$.
2) Par suite, $4^5 \equiv 3 \times 4 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}$.
Si $k = 5k'$, alors $4^k = (4^5)^{k'} \equiv 1 \pmod{11}$.
Si $k = 5k' + 1$, alors $4^k = (4^5)^{k'} \times 4 \equiv 4 \pmod{11}$.
Si $k = 5k' + 2$, alors $4^k = (4^5)^{k'} \times 4^2 \equiv 5 \pmod{11}$.
Si $k = 5k' + 3$, alors $4^k = (4^5)^{k'} \times 4^3 \equiv 9 \pmod{11}$.
Si $k = 5k' + 4$, alors $4^k = (4^5)^{k'} \times 4^4 \equiv 3 \pmod{11}$.
De même, on sait d'après le petit théorème de Fermat que $3^{10} \equiv 1$ (mod 11).
Il est facile de voir que $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$.
On en déduit de la même façon que :
Si $k = 5k'$, alors $3^k = (3^5)^{k'} \equiv 1 \pmod{11}$.
Si $k = 5k' + 1$, alors $3^k = (3^5)^{k'} \times 3 \equiv 3 \pmod{11}$.
Si $k = 5k' + 2$, alors $3^k = (3^5)^{k'} \times 3^2 \equiv 9 \pmod{11}$.
Si $k = 5k' + 3$, alors $3^k = (3^5)^{k'} \times 3^3 \equiv 5 \pmod{11}$.
Si $k = 5k' + 4$, alors $3^k = (3^5)^{k'} \times 3^4 \equiv 4 \pmod{11}$.

$4^{4n+2} - 3^{n+3} = (4^4)^n \times 4^2 - 3^n \times 3^3 \equiv 3^n \times 5 - 3^n \times 5 \equiv 0 \pmod{1}$.

34. ■ On recherche les entiers n tels que $2^n \equiv 1 \pmod 9$, ou $2^n - 1 \equiv 0$ (mod 9).

... et nous, nous disposons : il semble que cela soit le cas des entiers n de la forme $6k$.
Montrons-le.
Si $n = 6k$, alors $2^n = (2^6)^k$.
Mais on sait que $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod 9$. Donc $2^n \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 9$.
Par ailleurs si $n = 6k + r$, avec $0 < r$ ℂ 5, alors $2^n \equiv 2^r \pmod 9$, qui n'est pas 0, d'après l'écran de calculatrice précédent.

35. ■ Raisonnons en congruences modulo 7 :

	0	1	2	3	4	5	6
a^2	0	1	4	2	2	4	1
b^2	0	1	4	2	2	4	1
a^2+b^2	0	2	1	4	4	8	2

Le résultat en découle immédiatement…

Autres utilisations des congruences

36. ■ 1) Si $n \equiv 0 \pmod 4$, alors $n^2 \equiv 0 \pmod 4$.
Si $n \equiv \pm 1 \pmod 4$, alors $n^2 \equiv 1 \pmod 4$.
Si $n \equiv 2 \pmod 4$, alors $n^2 \equiv 0 \pmod 4$.
Autrement dit le carré d'un entier naturel est soit de la forme $4k$, soit de la forme $4k + 1$.

2) $2 + 1 = 3$ n'est pas un carré.

On sait par ailleurs que tout nombre premier 3 est de la forme $4k \pm 1$.

Le produit $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$ est donc congru à $2 \times (-1)^k + 1$, où k correspond au nombre de nombres premiers de la liste congrus à -1 modulo 4.
Que k soit impair ou pair, ce nombre sera toujours congru à 3 modulo 4.
Il ne peut donc pas être un carré.

37. ■
La démonstration est immédiate...
Si $n = 4k$, alors $n^2 = 16k \equiv 0 \pmod 8$.
Si $n = 4k + 1$, alors $n^2 = (4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 \equiv 1 \pmod 8$.
Si $n = 4k + 2$, alors $n^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 \equiv 4 \pmod 8$.
Si $n = 4k + 3$, alors $n^2 = (4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 \equiv 1 \pmod 8$.
Un carré peut donc être congru à 0, 1, 4 modulo 8.
Quand on additionne deux carrés, on peut donc avoir un nombre congru modulo 8 :

à $0 + 0 = 0$
à $0 + 1 = 1$
à $0 + 4 = 4$
à $1 + 4 = 5$
à $4 + 4 = 8 \equiv 0$.

Ou bien le nombre est pair, effectivement (cas 1, 3 et 6, donc de la forme $8k$ ou $8k + 4$).
Ou bien il est impair, plus précisément de la forme

$8k + 1 = 4 \times 2k + 1$ ou $8k + 5 = 4(2k + 1) + 1$

c'est-à-dire de la forme $4K + 1$.

38. ■ Remarquons que 0 ou 1 sont solutions de cette équation.
Supposons maintenant que n est supérieur ou égal à 2.
On en déduit :

$$5^n - 4^n = 3^n - 2^n$$

$$(5-4)\left(5^{n-1} + 4\times 5^{n-2} + ... + 4^{n-2}\times 5 + 4^{n-1}\right) = (3-2)\left(3^{n-1} + 2\times 3^{n-2} + ... + 2^{n-2}\times 3 + 2^{n-1}\right)$$

Écrivons cette égalité modulo 4. Il vient :

$$1 = (-1)^{n-1} + 2\times(-1)^{n-2} = (-1)^{n-2}(2-1) = (-1)^{n-2}\times 1 = (-1)^{n-1}\times(-1)^2 = (-1)^n$$

n est nécessairement pair.

Écrivons donc n sous la forme $2p$ avec p 1. L'équation devient :

$$25^p - 16^p = 9^p - 4^p$$

$$(25-16)(...) = 9^p - 4^p$$

Écrivons cette égalité modulo 9 :

$$0 \equiv -4^p$$

ce qui est impossible pour tout entier naturel p.
L'équation a pour solution 0 ou 1.

39. ■ Montrons successivement que 3, 4 et 5 divisent le produit abc.
Regardons ce qui se passe modulo 3.
Les carrés modulo 3 sont 0 et 1.
Ainsi $a^2 + b^2$ est congru à 0, 1 ou 2. Mais c^2 ne peut donc pas être congru à 2.
Donc $a^2 + b^2$ est congru à 0 ou à 1, ce qui n'a lieu que lorsque a ou b est congru à 0 modulo 3. Le produit abc est donc bien un multiple de 3.
Le cas modulo 4 se traite de la même façon : les carrés sont 0 et 1.
Ainsi $a^2 + b^2$ est congru à 0, 1 ou 2. Mais c^2 ne peut donc pas être congru à 2.
Donc $a^2 + b^2$ est congru à 0 ou à 1, ce qui n'a lieu que lorsque a ou b est congru à 0 modulo 3. Le produit abc est donc bien un multiple de 3.
Modulo 5 maintenant… Les carrés sont 0, 1, –1. Ainsi $a^2 + b^2$ est congru à 0, 1, –1, 2 ou 3 modulo 5.
Mais c^2 ne peut pas être congru à 2 ou 3.
On a $a^2 + b^2$ est congru à 1 ou –1 lorsque $a \equiv 0$ ou $b \equiv 0$. Dans ce cas, abc est bien congru à 0 modulo 5.
$a^2 + b^2 \equiv 0$ modulo 5 donne $c^2 \equiv 0$ modulo 0, donne aussi $c \equiv 0$ modulo 5 et donc le produit abc multiple de 5.
Finalement, puisque 3, 4, 5 sont premiers entre eux, 60 divise abc.

40. ■ n s'écrit donc sous la forme $100000x + 15270 + y$.
Utilisons les congruences modulo 4. n étant congru à 0 modulo 4, on peut écrire :

$$2 + y \equiv 0 \pmod 4$$

y étant par ailleurs un chiffre du système décimal, par essais successifs, seuls $y = 2$ ou $y = 6$ conviennent.
Traduisons maitenant le fait que $n \equiv 5 \pmod{11}$:

$$10x + 2 + y \equiv 5 \pmod{11}$$

$$10x + y = 3 \pmod{11}$$

Pour $y = 2$, on obtient $10x \equiv 1 \pmod{11}$, équation dont la solution est 10… Au demeurant, l'équation se résout bien car 10 est inversible, d'inverse lui-même, dans /11 .

De $10x = 1$, on déduit $100x = 10$, soit $x = 10$, dans /11 , solution qui ne peut pas convenir pour un chiffre décimal.
Enfin pour $y = 6$, on obtient $10x = 8$, dans /11 , équation que l'on peut résoudre à la calculatrice… ou à la main comme plus haut.
De $10x = 8$, on déduit $100x = 80$, soit $x = 3$, dans /11 : la solution cette fois convient.
En conclusion le nombre cherché est : **3**1527**6.**

41. ■ On peut tester les première valeurs de n pour se convaincre du résultat, s'il en était besoin…
Démontrons ce résultat par l'absude.
Supposons donc qu'il existe un entier p tel que $3n^2 + 3n + 7 = p^3$.
Ce que l'on peut écrire :

$$p^3 = 3n(3n + 1) + 7$$

Comme les entiers $3n$ et $3n + 1$ sont consécutifs, ils sont de parité différente et leur produit est pair. Par conséquent, p^3 est un entier impair ; il en est de même de p.
Il existe donc un entier q tel que $p = 2q + 1$.
L'égalité initiale s'écrit donc :

$$3n^2 + 3n + 7 = (2q + 1)^3 = 8q^3 + 12q^2 + 6q + 1$$

soit encore :

$$3(n^2 + n + 2) = 2q(4q^2 + 6q + 3).$$

3 est un nombre premier qui divise un produit de facteur : il divise donc au moins un des facteurs.
Pas 2…
Peut-il diviser q ?
S'il ne divise pas *q*, il divise obligatoirement $4q^2 + 6q + 3$, donc $4q^2$ car $6q + 3$ est manifestement un multiple de 3. Comme 4 est premier avec 3, 3 divise q^2 et donc q, ce qui est absurde !
Nécessairement donc, 3 divise q.
Il existe donc un entier r tel que $q = 3r$. En remplaçant, on peut écrire :

$$3(n^2 + n + 2) = 6r(36r^2 + 18r + 3)$$

soit après simplification

$$n^2 + n + 2 = 6r(12r^2 + 6r + 1).$$

Par conséquent, l'entier $n^2 + n + 2$ est un multiple de 6.
Étant déjà un multiple de 2 (car égal à $n(n + 1) + 2$), montrons que cela ne peut pas être un multiple de 3.
Il suffit de se placer dans /3 .
Si $n \equiv 0 \pmod 3$, alors $n^2 + n + 2 \equiv 2 \pmod 3$;
si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $n^2 + n + 2 \equiv 4 \pmod 3$;
si $n \equiv 2 \pmod 3$, alors $n^2 + n + 2 \equiv 2 \pmod 3$…
Jamais congru à 0 modulo 3 ! Le nombre $n^2 + n + 2$ n'est donc jamais un multiple de 6, contrairement à ce que nous affirmions plus haut.
Nous arrivons à une absurdité. C'est qu'il est impossible d'écrire $3n^2 + 3n + 7$ comme un cube !

Équations avec congruences

42. ■ 1) On teste les valeurs... On obtient :

$$n \equiv 1 \text{ ou } n \equiv 7 \text{ ou } n \equiv 3 \text{ ou } n \equiv 5.$$

4 racines carrées de 1, cela fait beaucoup non ?
2) L'équation équivaut à

$$(n + 5)^2 \equiv 1 \pmod 8.$$

On a plusieurs possibilités, d'après la question précédente :

$n + 5 \equiv 1 \pmod 8$ soit $n \equiv 4 \pmod 8$
$n + 5 \equiv 7 \pmod 8$ soit $n \equiv 2 \pmod 8$
$n + 5 \equiv 3 \pmod 8$ soit $n \equiv 6 \pmod 8$
$n + 5 \equiv 5 \pmod 8$ soit $n \equiv 0 \pmod 8$

3) L'équation équivaut à :

$n + 2 \equiv 0$
OU
$n + 4 \equiv 0$
OU
$n + 2 \equiv 2$ et $n + 4 \equiv 4$
OU
$n + 2 \equiv 4$ et $n + 4 \equiv 2$

soit dans cet ordre

$n \equiv 6$
OU
$n \equiv 4$
OU
$n \equiv 0$
OU
$n \equiv 2$ et $n \equiv -2$ ·········> impossible

43. ■ 1) Par tâtonnement, il est clair que $4 \times 3 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$.
Sinon, il faudrait trouver un nombre k tel que $4 \times k \equiv 1 \pmod{11}$, c'est-à-dire tel que :

$$4 \times k - 1 = 11k'$$
$$4 \times k - 11k' = 1$$

ce qui revient à une détermination des coefficients de Bézout : sachant que 4 et 11 sont premiers entre eux, c'est bien possible ici.
La résolution donne :

$$x \equiv 4 \times 1 = 4 \pmod{11}.$$

2) Là, comme 5 et 20 ne sont pas premiers entre eux, on ne peut pas trouver de nombre k tel que $5 \times k \equiv 1 \pmod{20}$.
Ceci étant, le pgcd de 5 et 20 étant 5, tout nombre de la forme $5k - 20k'$ sera nécessairement un multiple de 5 : il ne peut pas être égal à 8.
Pour être convaincu, on peut tester un par un les nombres, pour constater que l'équation n'a pas de solutions.

44. ■ La première équation permet d'écrire :

$$x = 4k + 1$$

où k est un entier relatif quelconque.

En reportant dans la deuxième équation :

$$4k + 1 \equiv 0 \pmod 3$$
$$4k \equiv 2 \pmod 3$$
$$k \equiv 2 \pmod 3$$

Donc x s'écrit sous la forme $4(2 + 3k') + 1 = 9 + 12k'$.
En substituant cette valeur dans la dernière équation, on arrive à :

$$9 + 12k' \equiv 5 \pmod 7$$
$$12k' \equiv 3 \pmod 7$$
$$5k' \equiv 3 \pmod 7$$
$$k' \equiv 2 \pmod 7$$

Bilan: k' s'écrit sous la forme $7k'' + 2$.
En remplaçant par cette valeur, on obtient :

$$x = 9 + 12(7k'' + 2) = 84k'' + 33.$$