Série d'exercices n° : 19
Coniques

❖ Exercice 1 :
Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation

$x^2 - 4y^2 = 1$. Déterminer les équations des asymptotes de $\mathcal{H}$ et tracer $\mathcal{H}$.

❖ Exercice2
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_t) : $z^2 + (1 - t^2 - 2it)z + t^2 - 2 + 2it = 0$
(t est un paramètre réel)

1.) Résoudre (E_t) dans $\mathbb{C}$
2.) M est l'image de la solution non réelle de (E_t)
   a. Montrer que M varie sur une parabole P .
   b. Construire P.

❖ Exercice 3 :
Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f la similitude directe de centre A(0,1), de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1) Déterminer la forme complexe de f.
2) Une courbe (C) a pour équation $x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y = 0$
   a) Déterminer une équation cartésienne de (C') image de (C) par f.
   b) En déduire que (C') est une parabole que l'on caractérisera. Tracer (C').
3) Déterminer alors la nature de la courbe (C).

❖ Exercice 4 :
1) Soit $\mathcal{E} = \{M(x, y) \in P;\ x^2 + 4y^2 = 1\}$ .Donner les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}$.
2) Soit D et D' les droites d'équations respectives x=1 et x=-1 et $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Soit $M_0(\cos(\theta), \frac{1}{2}\sin(\theta))$un point de P, avec $\theta \in IR \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Vérifier que M_0 appartient à $\mathcal{E}$.

b) Ecrire une équation de la tangente T à $\mathcal{E}$ au point M_0.

c) T coupe D et D' respectivement en K et K'.
   Montrer que le triangle KFK' est rectangle en F.

❖ Exercice 5 : (Bac)
Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
   Déterminer les coordonnées des foyers de l'ellipse (E) et donner son excentricité.

b) Soit (P) la parbole d'équation $y^2 = 2x + 4$.
Déterminer les coordonnées du foyer F de la parabole (P) et donner une équation de sa directrice.

2) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'ellipse (E) et la parabole (P).

Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2 = -2|x| + 4$

a) Vérifier que $(O, \vec{\jmath})$ est un axe de symétrie de (Γ).

b) Tracer (Γ) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3) a) Soit (C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 4$

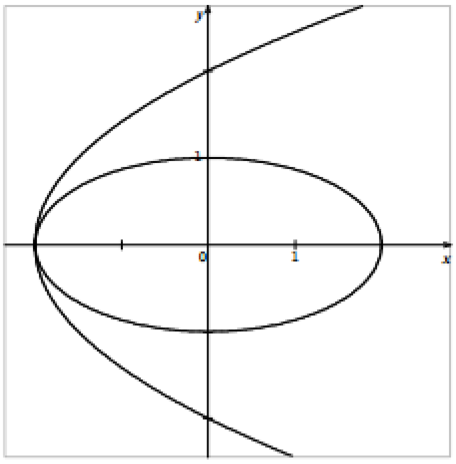
Vérifier que pour tout réel t de [0,2], le point $M(t , \sqrt{4-t^2})$ appartient à (C).

b) On pose $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$. Montrer que $I_1 = \pi$

4) Calculer $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4}\,dt$.

5) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et l'ellipse (E).

Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de I_1 et I_2 puis calculer $\mathcal{A}$.



❖ **Exercice 6 :**

On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation : $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ et soit le point $M\left(\frac{1}{\cos\alpha} ; 2\tan\alpha\right)$; $\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

1) **a)** Déterminer, par leurs coordonnées les sommets et les foyers de $\mathcal{H}$.

b) Donner les équations cartésiennes des deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 de $\mathcal{H}$.

c) Tracer $\mathcal{H}$.

d) Vérifier que le point $M \in \mathcal{H}$.

2) Soit T_M la tangente à $\mathcal{H}$ en M. Montrer qu'une équation de T_M est : $2x - y\sin\alpha - 2\cos\alpha = 0$.

3) On désigne par P_1 et P_2 les points d'intersection de T_M respectivement avec les droites Δ_1 et Δ_2

a) Donner les coordonnées des points P_1 et P_2

b) Montrer que l'aire du triangle OP_1P_2 est indépendant de α.

❖ **Exercice 7 :**

Le plan P est muni d'un repère orthonormé R=$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ Soit l'ensemble (E) : $y^2 = \frac{9}{4}(4-x^2)$

a- Déterminer la nature de (E).

b- Préciser les sommets de (E) puis le construire dans R.

2/ Soit $G : [0;\pi] \to IR; x \mapsto G(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\,dt$.

a- Calculer $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et montrer que $\forall x \in [0;\pi];\ G'(x) = -4\sin^2 x$

b- En déduire l'expression de $G(x)$ en fonction de x.

3/a- Hacher sur votre figure la partie (D) du plan limitée par (E) et les demi droites d'équation respectives $\begin{cases} x = 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

b- A l'aide de G calculer $\mathcal{A}(D)$ l'aire de D.

❖ **Exercice 8 :**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f l'application du plan dan lui-même qui à tout point d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \sqrt{2}(1+i)\overline{z}$

1) Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera son centre , son rapport et son axe.

2) Soit un point M(x ,y) et M'(x',y') son image par f . Vérifier que $\begin{cases} x' = \sqrt{2}(x+y) \\ y' = \sqrt{2}(x-y) \end{cases}$

3) Une courbe ***C*** a pour image par f la courbe ***C'*** d'équation : $5x'^2 + 5y'^2 + 6x'y' - 64 = 0$

a/ Déterminer une équation de ***C***

b/ En déduire que ***C*** est une ellipse dont on précisera son centre, ses foyers , ses sommets son excentricité et ses directrices.

c/ En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la courbe ***C'***

❖ **Exercice 9 :**

Soit S l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1-i)z + i$.

1) Montrer que S est une similitude directe de centre $I(1\,,0)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

2) Soit la courbe (C) dont une équation est : $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 4y + 7 = 0$

   a) Déterminer une équation de la courbe (C') image de (C) par S.

   b) En déduire que (C') est une parabole dont on précisera le sommet, le foyer et la directrice.

   c) Construire (C').

3) En déduire la nature de (C) et la construire.