

Exercice n°1 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{AB,AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [AC] et [JC].

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J, qui envoie A sur K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f puis justifier que $f(K) = L$.

b) Soit H le milieu du segment [AJ]. Justifier que $f(I) = H$.

3) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Soit φ l'application du plan dans

lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+i}{2}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Donner les affixes des points I, K, J et H.

c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$.

d) Dédire alors que $\varphi = f \circ s_{(IK)}$, (où $s_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4) a) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ . Tracer Δ .

b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.

Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$

Exercice n°2 :

Soit un triangle rectangle ABC tels que $AB = 2AC$ et $(\widehat{AB,AC}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$. Soit I le milieu de [AB].

1) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2) Soient (Γ) et (Γ') les cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB].

a) Montrer que $S(\Gamma) = (\Gamma')$.

b) La droite (IC) recoupe (Γ) en un point E. On pose $F = S(E)$.

Montrer que les points A, E et F sont alignés, puis construire F.

3) Soit f la similitude indirecte qui transforme Ω en A et A en B.

a) Déterminer le rapport de f et montrer que $f((BC)) = (AC)$.

b) Vérifier que fof est une homothétie et en déduire que $f((AC)) = (BC)$.

c) Déterminer alors le centre de f et construire son axe (Δ).

4) On suppose que $AC = 1$. On muni le plan complexe du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$.

a) Donner l'écriture complexe de S et déduire que l'affixe de Ω est $z_\Omega = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$.

b) Déterminer l'écriture complexe de f.

c) Dédire qu'une équation cartésienne de (Δ) est : $(1 + \sqrt{5})x + 2y - 2 = 0$

Exercice n°3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M'

d'affixe z' définie par : $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

1) Montrer que f est une similitude directe dont on déterminera le rapport k, l'angle θ et le centre A.

2) Soit M un point du plan d'affixe $z \neq 2$ et M' son image par f. Notons z' l'affixe de M'.

a) Montrer que $\frac{z'-z}{z'-2}$ est imaginaire pur. En déduire la nature du triangle AMM'.

b) Soit I le milieu de [MA]. Montrer que le triangle IMM' est équilatéral direct.

c) Dédire alors une construction simple du point M' connaissant M.

Exercice n°4 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) , on donne deux cercles (Γ) et (Γ') de centres respectifs $A(2+i)$ et $B(3)$ et de rayons respectifs 2 et $\sqrt{2}$

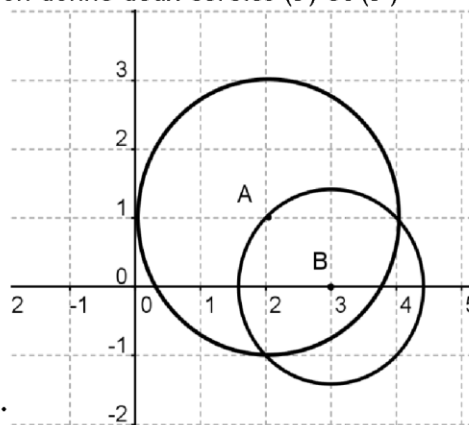
Soit S la similitude directe d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme (Γ) en (Γ') .

- 1) Donner la forme complexe de S .
- 2) En déduire l'affixe du centre I de cette similitude.
- 3) Déterminer l'affixe du point $O' = S(O)$.
- 4) Soit M un point variable sur (Γ) .

Expliquer comment peut-on construire son image M' par S ?

- 5) Soit S' la similitude indirecte de centre I qui transforme (Γ) en (Γ') .

- a) Donner la forme complexe de S' .
- b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) l'axe de S' .



Exercice n°5 :

ABC est un triangle équilatéral direct centre O . Soit A' et C' les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AB]$. On désigne par I le symétrique de O par rapport à C'

- 1) Montrer que le triangle OAI est équilatéral direct.
- 2) Soit f la similitude directe telle que $f(I) = O$ et $f(C) = B$
 - a) Déterminer le rapport et l'angle de S
 - b) Montrer que le centre Ω de f est un point commun des cercles circonscrits aux triangles OAI et OBC . Construire Ω
 - c) Montrer que $f(OA) = (AC)$ et déterminer $f(AC)$. En déduire que $f(A) = A'$
- 3) Soit R la rotation de centre O et telle que $R(A) = C$ et h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$

Montrer que $f = h \circ R$
- 4) Soit g la similitude indirecte telle que $g(I) = O$ et $g(C) = B$, On note J son centre.
 - a) Déterminer le rapport de g .
 - b) Calculer $(g \circ f^{-1})(O)$ et $(g \circ f^{-1})(B)$, caractériser $g \circ f^{-1}$
 - c) Montrer que $g(B) = A'$ et que J est le barycentre de $(C, 1)$ et $(A', -4)$
 - d) Montrer que l'axe Δ de g est la perpendiculaire à (BC) en J .

Exercice n°6 :

Dans le plan orienté dans le sens direct, On considère un rectangle $ABCD$ de centre O tel que

$(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et $AB=2AD=8$. Soit I le milieu de $[AB]$.

- 1) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui envoie A en B et I en C .
- 2) Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.
- 3) Soit g la similitude indirecte telle que $g(A)=I$ et $g(I)=C$.
 - a) Montrer que le rapport de g est égal à $\sqrt{2}$.
 - b) Soit Ω le centre de g . Montrer que $\Omega = S_A(C)$.
 - c) Déterminer et construire l'axe (Δ) de g .
- 4) Soit $C'=g(C)$. Montrer que $C' = S_I(\Omega)$, puis construire C' .
- 5) La droite (Δ) coupe $[AI]$, $[IC]$ et $[CC']$ respectivement en M, N et P . Prouver que $g(M)=N$ et $g(N)=P$.
- 6) Soit φ la similitude directe telle que $\varphi(B)=I$ et $\varphi(I)=D$.
 - a) Déterminer le rapport et l'angle de φ .
 - b) Montrer que C est le centre de φ .