EXERCICE N°1

Dans le plan orienté, soit un triangle ABC rectangle en A de sens **direct** et tel que $AC = 2AB$.

1) Faire une figure et construire le point I milieu du segment [AC] et J milieu du segment [AB].

2) a/ Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur I et B sur C.

b/ Montrer que f est une rotation, préciser son angle et construire son centre Ω.

3) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on pose $h = f \circ R^{-1}$.

a/ Déterminer la nature de l'application h.

b/ Déterminer h(A). En déduire que $f = t_{\overrightarrow{AI}} \circ R$

4) On pose $E = R(I)$ et on désigne par F le point tel que AEFI soit un carré.

Déterminer fof(A). En déduire que Ω est le milieu de [AF].

5) a/ Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui envoie I sur A et A sur B.

b/ Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

EXERCICE N°2

1) Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ et l'équation dans $\mathbb{C}$: $(\mathbf{E}_\theta) : \mathbf{z}^2 - (1 + \mathbf{i} + (1 - \mathbf{i})\mathbf{e}^{i\theta})\mathbf{z} + (1 + \mathbf{i})\mathbf{e}^{i\theta} - \mathbf{i}\mathbf{e}^{2i\theta} = 0$

a/ Vérifier que $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de l'équation (E_θ).

b/ Déterminer alors l'autre solution z_2 de (E_θ).

2) le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z' tel que $z' = -iz + 1 + i$

a/ Déterminer l'affixe du point A l'image de O par g.

b/Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

c/ Déterminer $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des points M_1 d'affixe z_1 lorsque θ varie.

d/ Soit M_2 le point d'affixe z_2. Vérifier que $g(M_1) = M_2$.

En déduire l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points M_2 lorsque θ varie.

EXERCICE N°3

On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = -x + \tan x$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation : $-x + \tan x = n$ admet une unique solution α_n dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

3) a/ Montrer que la suite (α_n) est croissante.

b/ En déduire que la suite (α_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie sur $]0,1]$ par $\mathbf{f(x)} = 2 - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de **f** dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan (**unité graphique : 2cm**)

I. 1) Etudier la dérivabilité de **f** à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat .

2) a/ Vérifier que pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x)=\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ et dresser le tableau de variation de **f**.

b/ Etudier les variations de **f'** sur]0,1[. En déduire que pour tout $x \in]0,1[$ on a : $f'(x) \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

c/ Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

3) a/ Monter que **f** possède une fonction réciproque qu'on note f^{-1} définie sur $]-\infty,2]$.

b/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-\infty,2]$ et que pour tout $x \leq 2$: $0 \leq \left(f^{-1}\right)'(x) \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

c/ Montrer que l'équation $f^{-1}(x)=x$ admet une unique solution $\alpha \leq 2$.

4) Montrer que pour tout $x \in]-\infty,2]$, on a : $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x-2)^2}}$.

II. Soit φ la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ par $\begin{cases} \varphi(x)=\sqrt{f^{-1}(2+\tan x)} & \text{si} \quad x \neq -\frac{\pi}{2} \\ \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$

1) Montrer que φ est continue à droite en $-\frac{\pi}{2}$.

2) Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, on a : $\varphi(x)=\sqrt{\cos x}$

3) Montrer que φ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ sur [0,1].

4) Déterminer D l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1} et calculer $(\varphi^{-1})'(x)$ pour tout $x \in D$.

EXERCICE N°5

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) Si f est une fonction définie, dérivable et décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Alors la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=f(\cos x)$ est :

a) décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ b) croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ c) n'est pas monotone sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct .

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^2=\bar{z}^2$ est :

a) une droite b) un cercle c) réunion de deux droites d) deux points

3) Si $\theta \in]\pi,2\pi[$ alors un argument du nombre complexe $e^{i\theta}-e^{-i\theta}$ est :

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $-\dfrac{\pi}{2}$ c) 2θ d) $\pi+\theta$

4) Soit f une fonction définie et deux fois dérivables sur IR et (ζ) sa courbe dans un repère orthonormé et dont le tableau de variation de sa **fonction dérivé f '** est donné ci-dessous alors :

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
f''(x)		+	0	+	0	−	
f'(x)	−5	↗			14	↘	1

a) La courbe (ζ) de f n'admet aucun point d'inflexion.

b) La fonction f est croissante sur $]-\infty,5]$

c) Pour tous réels a et b, on a : $|f(b)-f(a)| \geq 14\,|b-a|$

d) La courbe (ζ) de f admet un minimum local.

CORRECTION EXERCICE N°1

2) **a/** On a $AC = 2AB \neq 0$ et I le milieu de [AC] donc $AB = IC \neq 0$

$\Rightarrow$ Il existe un unique déplacement f tel que f(A)=I et f(B)=C.

b/ f(A)=I et f(B)=C.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \neq 2k\pi \Rightarrow$ f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

Le centre Ω de f est l'intersection des médiatrices des segments [AI] et [BC]

3) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $h = f \circ R^{-1}$.

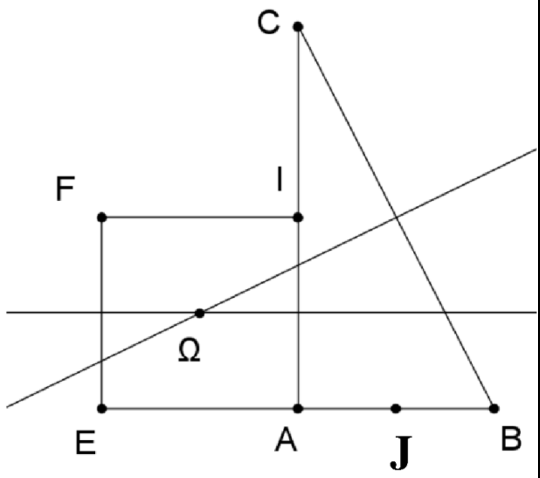
a/ h est la composée de deux déplacements d'angles $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$

donc h est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow$ h est une translation

b/ $h(A) = f \circ R^{-1}(A) = f\left(R^{-1}(A)\right) = f(A) = I$

h est une translation et h(A)=I $\Rightarrow h = t_{\overrightarrow{AI}}$



$h = f \circ R^{-1} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{AI}} = f \circ R^{-1}$

$\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{AI}} \circ R = f \circ R^{-1} \circ R$

$\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{AI}} \circ R = f \circ id$

$\Leftrightarrow \boxed{t_{\overrightarrow{AI}} \circ R = f}$

4) $fof(A) = f(I)$ car f(A)=I

$= t_{\overrightarrow{AI}} \circ R(I)$ car $f = t_{\overrightarrow{AI}} \circ R$

$= t_{\overrightarrow{AI}}(E) = F$

f est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Donc fof est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Signifie que fof est la symétrie centrale de centre Ω

Comme fof(A)=F alors Ω est le milieu de [AF].

5) **a/** On a $AC = 2AB$ et I le milieu de [AC] donc $IA = AB$

$\Rightarrow$ Il existe un unique antidéplacement g tel que g(I)=A et g(A)=B.

b/ g est l'antidéplacement tel que g(I)=A et g(A)=B

Comme les médiatrices des segments [AI] et [AB] sont distinctes.

Alors g est une symétrie glissante.

Soit $\vec{u}$ le vecteur de g et Δ l'axe de g.

On a g(A) = B $\Rightarrow$ **J** le milieu de [AB] est un point de Δ

gog(I)=g(A)=B $\Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{IB}$ car $gog = t_{2\vec{u}}$

Donc $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$ et Δ la droite passant par **J** et de vecteur directeur $\frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$.

CORRECTION D'EXERCICE N°2

$\theta \in [0, 2\pi]$ et $(E_\theta): z^2 - (1+i+(1-i)e^{i\theta})z + (1+i)e^{i\theta} - ie^{2i\theta} = 0$

1) a/ pour $z = e^{i\theta}$

$$\left(e^{i\theta}\right)^2 - (1+i+(1-i)e^{i\theta})e^{i\theta} + (1+i)e^{i\theta} - ie^{2i\theta}$$

$$= \left(e^{2i\theta}\right) - (1+i)e^{i\theta} - (1-i)e^{2i\theta} + (1+i)e^{i\theta} - ie^{2i\theta}$$

$$= 0$$

Donc $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de l'équation (E_θ).

b/ $z_1 z_2 = \frac{c}{a} = \frac{(1+i)e^{i\theta} - ie^{2i\theta}}{1} \Leftrightarrow z_2 = \frac{(1+i)e^{i\theta} - ie^{2i\theta}}{e^{i\theta}} = 1 + i - ie^{i\theta}$

2) $g : M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z' = -iz + 1 + i$

a/ $A = g(O) \Leftrightarrow z_A = -iz_O + 1 + i = -i \times 0 + 1 + i = 1 + i$

b/ $g : M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z' = -iz + 1 + i = az + b$ où $a = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

Donc g est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe z_Ω tel que

$$z_\Omega \times (1 - (-i)) = 1 + i \Leftrightarrow z_\Omega = 1 \Leftrightarrow \Omega(1, 0)$$

c/ $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des points M_1 d'affixe $z_1 = e^{i\theta}$ lorsque θ varie dans $[0, 2\pi]$ est le cercle de centre O et de rayon 1 car $|z_1| = 1$ et $\arg(z_1) \equiv \theta[2\pi]$.

d/ $-iz_1 + 1 + i = -ie^{i\theta} + 1 + i = z_2 \Leftrightarrow M_2 = g(M_1)$

$\mathcal{C}_2$ l'ensemble des points M_2 d'affixe z_2 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi]$ est le cercle image de $\mathcal{C}_1$ par la rotation g .

$\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre A et de rayon 1.

CORRECTION D'EXERCICE N°3

1) La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = -1 + 1 + \tan^2 x = \tan^2 x$

f' est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

f est strictement croissante et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow$ f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[f(0), \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)\right[= [0, +\infty[$

2) Soit $n \in IN$

La fonction f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$

Comme $n \in [0, +\infty[$

Alors l'équation f(x)=n admet une unique solution α_n dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow$ l'équation : $-x + \tan x = n$ admet une unique solution α_n dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

a/ Pour tout $n \in IN$

$$f(\alpha_n) = n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n = f^{-1}(n)$$

$$n + 1 \geq n \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(n+1) \geq f^{-1}(n) \qquad \text{car } f^{-1} \text{ est croissante}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_{n+1} \geq \alpha_n$$

$\Rightarrow$ La suite (α_n) est croissante.

b/ La suite (α_n) est croissante et majorée par $\frac{\pi}{2}$ donc elle est convergente

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim_{n \to +\infty} f^{-1}(n) = \frac{\pi}{2}$$

Car f^{-1} est une bijection croissante de $[0, +\infty[$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

CORRECTION D'EXERCICE N°4

I. f définie sur $]0,1]$ par $\mathbf{f(x)} = 2 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

1) $$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - 2}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(1-x)(1+x)}{x(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1+x)}{x\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

$\Rightarrow$ la fonction **f** n'est pas dérivable à gauche en 1 et C la courbe de f admet au point de coordonnée (1 , 2) une demi tangente verticale dirigée vers le bas.

2) a/ La fonction $x :\longmapsto 1 - x^2$ est dérivable et strictement positive sur $]0,1[$

$\Rightarrow x :\longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]0,1[$

$\Rightarrow$ f est dérivable sur $]0,1[$ en tant que quotient de deux fonctions.

$$f'(x) = 0 - \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}.x - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = -\frac{\frac{-x^2 - 1 + x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \neq 0 > 0$$

x	0	1
f'(x)	|| +	||
f(x)	|| $-\infty$ ↗	2

b/ La fonction **f '** est dérivable sur $]0,1[$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right)'=-\frac{2x\sqrt{1-x^2}+x^2\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{x^4\left(1-x^2\right)}=-\frac{\frac{2x\left(1-x^2\right)-x^3}{\sqrt{1-x^2}}}{x^4\left(1-x^2\right)}=\frac{3x^2-2}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$$

$f''(x)=0 \iff x=\sqrt{\frac{2}{3}}\in]0,1[$ ou $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}\notin]0,1[$

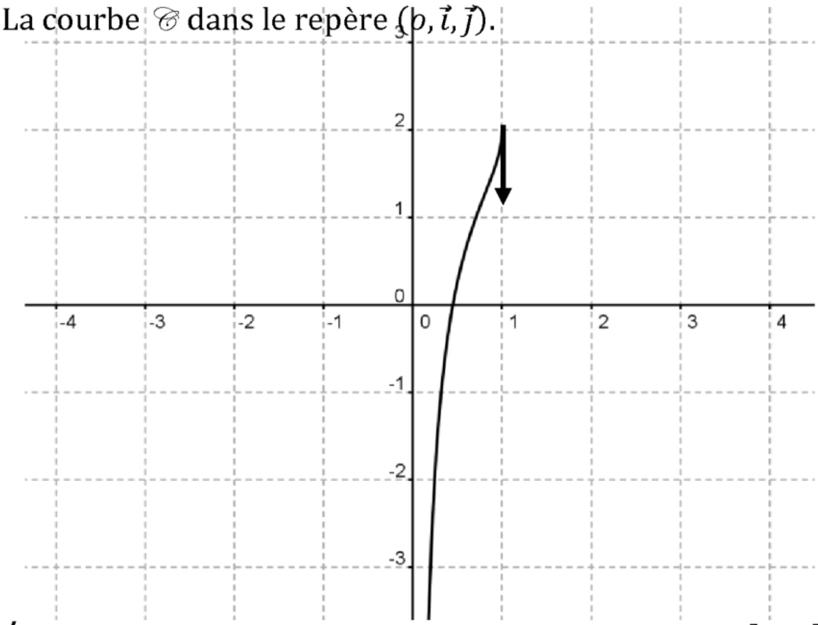
x	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		1
f''(x)	‖	−	0	+	‖
f'(x)	‖ $+\infty$	↘	$f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	↗	$+\infty$ ‖

D'après le tableau de variation de **f '**

La fonction **f '** admet en $\sqrt{\frac{2}{3}}$ un minimum globale sur $]0,1[$

Signifie que pour tout $x\in]0,1[$, ona : $f'(x)\geq f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

c/ La courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.



3) a/ La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,1]$ donc elle réalise une bijection de $]0,1]$ sur $f(]0,1])=]-\infty,2]$

b/ • La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\neq 0$

pour tout $x\in]0,1[$ $\Rightarrow$ f^{-1} est dérivable sur $f(]0,1[)=]-\infty,2[$

• $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$ $\Rightarrow$ f^{-1} est dérivable à gauche en $f(1)=2$

Donc f^{-1} est dérivable sur $]-\infty,2]$ et pour tout $x\in]-\infty,2]$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{f'(y)}\quad \text{où } y=f^{-1}(x)\in]0,1[$$

• f 'est strictement positive sur $]0,1[\Rightarrow 0\leq\dfrac{1}{f'(y)}$

• D'après 2)b) : $f'(y)\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ pour tout $y\in]0,1[$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{f'(y)}\leq\frac{2}{3\sqrt{3}}} \text{ pour tout } y\in]0,1[$$

Donc pour tout $\mathbf{x\leq 2}$: $\mathbf{0\leq\left(f^{-1}\right)'(x)\leq\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$

c/ On pose la fonction définie sur $]-\infty,2]$ par $\mathbf{h(x)=f^{-1}(x)-x}$

h est dérivable sur $]-\infty,2]$ et $h'(x)=\left(f^{-1}\right)'(x)-1<0$ car $\left(f^{-1}\right)'(x)\leq\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

Donc h est strictement décroissante et continue sur $]-\infty,2]$

$$h\left(]-\infty,2]\right)=\left[h(2),\lim_{x\to-\infty}h(x)\right[=[-1,+\infty[\text{ en effet:}$$

$$h(2)=f^{-1}(2)-2=1-2=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(f^{-1}(x)-x\right)=0-(-\infty)=+\infty$$

Comme $0\in[-1,+\infty[$ alors l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution

$\alpha\in]-\infty,2]$ signifie que $\mathbf{f^{-1}(x)=x}$ admet une unique solution $\alpha\leq 2$

4) Montrer que pour tout $x\in]-\infty,2]$, on a : $\mathbf{f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x-2)^2}}}$

Soit $x\in]-\infty,2]$ et $y\in]0,1]$

$$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)\Leftrightarrow x=2-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\Leftrightarrow x-2=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\Leftrightarrow y^2(x-2)^2=1-y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2\left((x-2)^2+1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\quad\text{ou}\quad \underbrace{y=-\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}}_{\text{à rejeter car } y\in]0,1]}$$

II. 1) $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \sqrt{f^{-1}(2+\tan(x))} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{f^{-1}(x)} = 0 = \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \varphi$ est continue à droite en $-\frac{\pi}{2}$.

2) $\varphi(x) = \sqrt{f^{-1}(2+\tan(x))} = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1+(2+\tan(x)-2)^2}}} = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}}$

$$= \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}}}$$

$$= \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}}}} \quad \text{car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$= \sqrt{|\cos x|} = \sqrt{\cos x} \quad \text{car } \cos x \geq 0 \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

3) φ est définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ par $\varphi(x) = \sqrt{\cos x}$

φ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et $\varphi'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} > 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

φ est strictement croissante et continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ donc φ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ sur $\varphi\left(\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\right) = [\varphi(0), \varphi(1)] = [0, 1]$

4) • La fonction φ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et $\varphi'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \neq 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\Rightarrow \varphi^{-1}$ est dérivable sur $\varphi\left(\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\right) =]0, 1[$

• Dérivabilité de φ^{-1} à gauche en 1

La fonction φ est dérivable à gauche en 0et $\varphi'(0) = 0$

$\Rightarrow \varphi^{-1}$ n'est pas dérivable à gauche en $\varphi(0)=1$

• Dérivabilité de φ^{-1} à droite en 0

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\varphi(x)-\varphi(-\frac{\pi}{2})}{x+\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sqrt{\cos x}}{x+\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{x+\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\cos x}} = \cos'\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow \varphi^{-1}$ est dérivable à droite en $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Conclusion : φ^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{où } y = \varphi^{-1}(x)$$

$$= -\frac{2\sqrt{\cos y}}{\sin y}$$

$y=\varphi^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi(y) = \sqrt{\cos y}$

$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^4}$

il en résulte que $\boxed{\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}$

pour tout $x \in [0\,,1[$