EXERCICE N°1

Dans le plan oreinté on considère un carré direct ABCD de centre O.
On désigne par :

I, J et K les milieux respectifs des segments [AB]; [BC] et [CD].

L est le milieu du segment [OC].

$\varphi = S_O \circ R_{\left(I;\frac{\pi}{2}\right)}$.

1/a) Déterminer $\varphi(I)$. En déduire que φ est une isométrie différente de l'identité du plan.

b) Déterminer $\varphi(J)$ puis $\varphi(B)$.

c) Déterminer que φ est une rotation de centre J dont on précisera l'angle.

2/ Soit g l'isométrie définie par $g = \varphi \circ S_{(AC)}$.

a) Caractériser $S_{(JC)} \circ S_{(JL)}$ et $S_{(JL)} \circ S_{(AC)}$.

b) Déduire que $g = S_{(JC)} \circ S_L$.

c) On désigne par Δ_1 et Δ_2 les médiatrices respectives de [JC] et [OJ]. Caractériser $S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$. En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

3/ Soit G le barycentre des poionts pondérés $(O,2)$; $(J,-1)$ et $(I,1)$ et G' son image par φ. Exprimer $\overrightarrow{CG'}$ en fonction de $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CK}$.

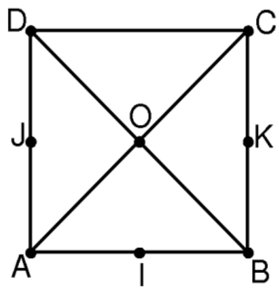
EXERCICE N°2

Dans la figure ci-contre on a :

. ABCD est un carré de centre O

. I=A∗B; J=A∗D et K = B ∗ C

Soit f une isométrie qui transforme A en D et D en C et dont l'ensemble des points fixes n'est pas vide.



/**a**- Montrer que f admet un seul point fixe

b- Prouver alors que f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

2/ Soit h l'isométrie sans point fixe qui transforme A en D et I en J.

a- Déterminer h(B).

b- Montrer que h est une symétrie glissante dont on déterminera sont vecteur $\vec{u}$ et son axe Δ.

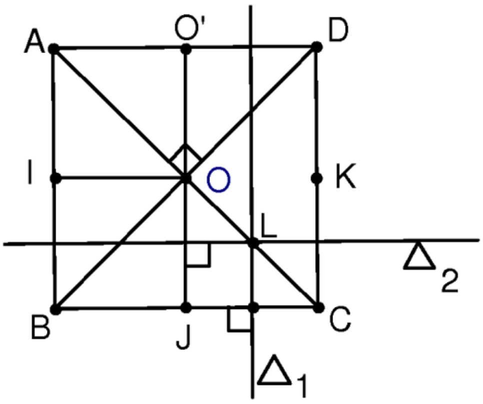
3/ Désignons par E=h(K).

4/ Posons $\varphi = h^{-1} \circ f$.

a- Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(A)$ puis caractériser φ.

b- Déterminer $\Gamma = \{M \text{ du plan tel que } f(M) = h(M)\}$.

CORRECTION D'EXERCICE N°1



1/a) . $I = B * A \Leftrightarrow S(I) = S(B) * S(A) \Leftrightarrow S(I) = D * C = K$.

$\varphi(I) = S\left[R(I)\right] = S(I) = K$.

S et R sont deux isométries $\Rightarrow \varphi = S \circ R$ est une isométrie

comme $\varphi(I) = K \neq I$ donc φ est distincte de Id_P.

b) I=A∗B et $O = A * C \Rightarrow \overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AL}$

donc IOO'A est un parallélogramme

de plus AI=AO' et $\widehat{\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AO'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc AIOO' est un carré direct

On montre de même IBJO est un carré direct.

Ainsi IJ=$\sqrt{2}$IB $= \sqrt{2}IA = IO'$ aussi $\widehat{\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IO'}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IO}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'}\right)}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

par suite $\begin{cases} IJ = IO' \\ \widehat{\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IO'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(J) = O'$

$* *\quad \varphi(J) = S\left[R(J)\right] = S(O') = J$.

♦ $\varphi(B) = S\left[R(B)\right] = S(O)$ car IBJO est un carré direct.

$= O$.

c) $\varphi(J) = J$ et $\varphi \neq Id_P$ donc φ est soit une rotation de centre J soit une symétrie orthogonale d'axe passant par J.

Supposons que φ est une symétrie ortogonale d'axe Δ

$\varphi(B) = O \Rightarrow \Delta = \text{méd}[BO] = (IJ)$

$\varphi(I) = K \Rightarrow \Delta = \text{méd}[IK] = (OJ)$

Donc $(IJ) = (OJ)$ ce qui est absurde.

Alors notre supposition est fausse par suite φ est une rotation de centre J et d'angle $\theta \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO}\right)}\ [2\pi] \equiv -$ car $\varphi(B) = O$

$\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ car BJOI est un carré direct.

Enfin: $\varphi = r_{\left(J; -\frac{\pi}{2}\right)}$.

2/a) . $(JC) \cap (JL) = \{J\}$ et $2\widehat{(\overrightarrow{JL},\overrightarrow{JC})} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Rightarrow\ S_{(JC)} \circ S_{(JL)} = r_{\left(J;-\frac{\pi}{2}\right)} = \varphi.$

. Comme $(AC)\perp(JL)$ alors $S_{(JL)} \circ S_{(AC)} = S_L$.

b) $g = \varphi \circ S_{(AC)} = (S_{(JC)} \circ S_{(JL)}) \circ S_{(AC)}$

$= S_{(JC)} \circ (S_{(JL)} \circ S_{(AC)})$

$= S_{(JC)} \circ S_L.$

c) OJCK est un carré direct donc Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires

Alors $S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$ est la symétrie centrale de centre celui du carré OJCK qui est L.

Ainsi $S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1} = S_{L'}$.

Par suite $g = S_{(JC)} \circ (S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}) = \left(S_{(JC)} \circ S_{\Delta_2}\right) \circ S_{\Delta_1}$

Comme Δ_2=méd[JO] et on a déjà $(JC)\perp(JO)$ alors $(JC)//\Delta_2$ et $O = S_{\Delta_2}(J)$

Ce qui donne $S_{(JC)} \circ S_{\Delta_2} = t_{\overrightarrow{JO}}$.

Ainsi $g = t_{\overrightarrow{JO}} \circ S_{\Delta_1}$ et puisque $\overrightarrow{JO}$ est un vecteur directeur de Δ_1 alors

g est la symétrie glissante d'axe Δ_1 et de vecteur $\overrightarrow{JO}$.

3/ On a :

. $\varphi(I) = K$ et $\varphi(J) = J$

. $\varphi(O) = S[R(O)] = S(A)$ car IOLA est un carré direct

$= C$ car $O = A * C$.

. G est le barycentre des points pendérés $(O;2)$; $(J,-1)$ et $(I,1)$

Et comme φ conserve le barycentre alors G' est le barycentre des points pondérés $(C,2)$; $(J,-1)$ et $(K,1)$

par suite $\overrightarrow{CG'} = \frac{-1}{2-1+1}\overrightarrow{CJ} + \frac{1}{2-1+1}\overrightarrow{CK}$.

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{CJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$.

C0RRECTION D'EXERCICE N°2

1/a- M est un point fixe par f

$\Rightarrow\ M \in med[AD] \cap med[DC] = \{O\}$ car $f(A) = D$ et $f(D) = C$

$\Rightarrow M=O$

Conclusion : f admet un seul point fixe O.

b- f admet un seul point fixe O donc f est une rotation de centre O

et d'angle θ. Comme $f(A) = D$ alors $\theta \equiv \widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})}\ [2\pi]$

puisque ABCD est un carré direct de centre O alors $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Conclusion : f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

2/a- $I = A * B \iff h(I) = h(A) * h(B) \iff J = D * h(B)$

Or $J = D * A$ donc $h(B) = A$.

b- h est une isométrie sans point fixe donc h est soit une translation soit une symétrie glissante.

• Supposons que f est une translation de vecteur $\vec{w}$.

$f(A) = D$ donc $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$

$f(B) = A$ donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$ se qui est absurde

Donc notre supposition est fausse par suite f est une symétrie glissante.

. $f \circ f(B) = D$ donc $t_{2\vec{u}}(B) = D$ alors $2\vec{u} = \overrightarrow{BD}$ signifie que $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

. $f(B) = A$ donc $A * B = I \in \Delta$

aussi $f(A) = D$ alors $A * D = J \in \Delta$

Conclusion : $\Delta = (IJ)$.

3/a- K appartient à la droite perpendiculaire à (AB) en B

donc $E = h(K)$ appartient à la droite perpendiculaire à $h((AB)) = (DA)$

en $h(B) = A$ alors $E \in (AI)$.

b- $h(B) = A$ et $h(K) = E$ donc $BK = AE$ alors $AE = \frac{1}{2}BC$

donc $AE = \frac{1}{2}BA = AI$.

Ainsi $AE = AI$ et $E \in (AI)$ donc $A = E * I$.

4/a- $\varphi(I) = h^{-1} \circ f(I) = h^{-1}(J) = I$

$\varphi(A) = h^{-1}[f(A)] = h^{-1}(D) = A$

. $\varphi = h^{-1} \circ f$ est une isométrie qui fixe A et I alors φ est soit l'identité du plan soit la symétrie orthogonale d'axe (AI).