1. PGCD, propriété et congruence :

EXERCICE 1

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2-11n+48$ est divisible par $n+3$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2-9n+16$ est un entier naturel non nul.
2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :
   $\operatorname{pgcd}(a\,;b)=\operatorname{pgcd}(bc-a\,;b)$
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité est vraie :
   $\operatorname{pgcd}\left(3n^3-11n\,;n+3\right)=\operatorname{pgcd}(48\,;n+3)$
4. a. Détermienr l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.
   b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3x^3-11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

EXERCICE 2

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies par :

- $x_0=3$; $x_{n+1}=2\cdot x_n-1$
- $y_0=1$; $y_{n+1}=2\cdot y_n+3$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $x_n=2^{n+1}+1$
2. a. Calculer le $PGCD$ de x_8 et x_9, puis celui de x_{2002} et x_{2003}.
   Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?
   b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
3. a. Démontrer que poru tout entier naturel n :
   $2x_n-y_n=5$
   b. Exprimer y_n en fonction de n.
   c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
   d. On note d_n le $PGCD$ de x_n et de y_n pour tout entier naturel n.
   Démontrer que l'on a $d_n=1$ ou $d_n=5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

EXERCICE 3

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :
$$\begin{cases} u_0=14 \\ u_{n+1}=5u_n-6 \text{ pour tout entier naturel } n\end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n :
   $u_{n+2}\equiv u_n \pmod{4}$.
   En déduire que pour tout entier naturel k :
   $u_{2k}\equiv 2 \pmod{4}$ et $u_{2k+1}\equiv 0 \pmod{4}$
3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:
   $2\cdot u_n=5^{n+2}+3$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n :
   $2u_n\equiv 28 \pmod{100}$.
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
5. Montrer que le $PGCD$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant.
   Préciser sa valeur.

2. Bezout et gauss :

EXERCICE 4

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.
   b. En déduire que si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$, alors a et b sont premiers entre eux.
2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;b)$ tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.
   a. Déterminer a lorsque $a=b$.

b. Vérifier que $(1;1)$, $(2;3)$ et $(5;8)$ sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si $(a;b)$ est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. a. Montrer que si $(x;y)$ est une solution différente de $(1;1)$ alors $(y-x;x)$ et $(y;y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_n$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, $n \geqslant 0$:
$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $(a_n;a_{n+1})$ est solution.
En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE 5

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

"*Etant donnés deux entiers naturels, a et b non nuls, si pgcd $(a;b) = 1$ alors pgcd $(a^2;b^2) = 1$*"

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par : $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$.

On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a :

$$S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

2. Etude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$

a. Démontrer que :
pgcd $(S_{2k};S_{2k+1}) = (2k+1)^2 \cdot$ pgcd $(k^2;(k+1)^2)$.

b. Calculer pgcd $(k;k+1)$.

c. Calculer pgcd $(S_{2k};S_{2k+1})$.

3. Etude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.

a. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.

b. Calculer pgcd $(S_{2k+1};S_{2k+2})$.

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE 6

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que :
$x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - 4 \cdot x^2$.

2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients entiers.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers :
$A = n^2 - 2n + 2 \quad ; \quad B = n^2 + 2n + 2$
et d leur $PGCD$.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.

3. Montrer que, tout diviseur commun de A et de B, divise $4n$.

4. Dans cette question, on suppose que n est impair.

a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

b. Montrer que d divise n.

c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que n est pair.

a. Montrer que 4 ne divise par $n^2 - 2n + 2$.

b. Montrer que d est de la forme $d = 2 \cdot p$, où p est impair.

c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. *(On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)*

EXERCICE 7

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est à dire tel que $n^3 \equiv 2009 \pmod{10\,000}$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.

2. En déduire que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \pmod{16}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. a. Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = u_n \cdot \left[u_n^4 + 5 \cdot (u_n^3 + 2 \cdot u_n^2 + 2 \cdot u_n + 1)\right]$

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. a. Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.

b. Démontrer alors que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \pmod{625}$

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que :
$2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par $10\,000$.

2. Conclure, c'est à dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par $2\,009$.

4. $ax+by=c$:

EXERCICE 8

Partie A : Question de cours

1. Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$(S)\ \begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tel que :
   $19u + 12v = 1$

   (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple)

   Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13\times 12v + 6\times 19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à :
   $$\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$$

   b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ équivaut à :
   $n \equiv n_0 \pmod{12\times 19}$.

3. a. Trouver un couple $(u\,;v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

   b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) *(on pourra utiliser la question 2. b.)*.

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 1\times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 9

On rappelle que 2 003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :
   $123u + 2003v = 1$

   b. En déduire un entier relatif k_0 tel que :
   $123k_0 \equiv 1 \pmod{2003}$

   c. Montrer que, pour tout entier relatif x,
   $123x \equiv 456 \pmod{2003}$ si, et seulement si, $x \equiv 456k_0 \pmod{2003}$

   d. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :
   $1 \leqslant n \leqslant 2002$ et $123n \equiv 456 \pmod{2003}$

2. Soit a un entier tel que : $1 \leqslant a \leqslant 2002$

   a. Déterminer : $PGCD(a\,;2003)$
   En déduire qu'il existe un entier m tel que :
   $am \equiv 1 \pmod{2003}$

   b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que :
   $0 \leqslant x \leqslant 2\,002$ et $ax \equiv b \pmod{2003}$

EXERCICE 10

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point :

Proposition 1 : "pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$".

Proposition 2 : "si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$ alors $x \equiv 0 \pmod{3}$".

Proposition 3 : "l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples :
$(4 + 10k\,; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$".

Proposition 4 : "Il existe un seul couple $(a\,;b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $PPCM(a,b) - PGCD(a,b) = 1$".

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : "Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27".

EXERCICE 11

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

   a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation :
   $14u + 39v = 1129$

   b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\,;y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation :
   $14x + 39y = 1$
   Vérifier que le couple $(-25\,;9)$ est solution de cette équation.

   c. En déduire un couple $(u_0\,;v_0)$ solution particulière de l'équation :
   $14u + 39v = 1129$
   Donner la solution générale de cette équation, c'est à dire l'ensemble des couples $(u\,;v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

   d. Déterminer, parmi les couples $(u\,;v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
   En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

   b. Soit $\dfrac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :
   $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.

Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

EXERCICE 12

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que :

$$\begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

a. Vérifier que 239 est solution de ce système.

b. Soit N un entier relatif solution de ce système.
Démontrer que N peut s'écrire sous la forme :
$N = 1 + 17x = 5 + 13y$
où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

c. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

e. Démontrer l'équivalence entre :

$$N \equiv 18 \pmod{221} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Existe-t-il un entier naturel k tel que :
$10^k \equiv 1 \pmod{17}$?

b. Existe-t-il un entier naturel ℓ tel que :
$10^\ell \equiv 18 \pmod{221}$?

EXERCICE 13

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n\,;m)$ d'entiers naturels non nul vérifiant la relation :
$7^n - 3\times 2^m = 1 \ (F)$

1. On suppose $m \leqslant 4$.
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.

a. Montrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors :
$7^n \equiv 1 \pmod{32}$

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

c. En déduire que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.

d. Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n\,;m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

EXERCICE 14

Soit A l'ensemble des entiers naturesl de l'intervalle $[1\,;\,46]$.

1. On considère l'équation :
(E) : $23{\cdot}x + 47{\cdot}y = 1$
où x et y sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière $(x_0\,;\,y_0)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;y)$ solutions de (E).

c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que :
$23{\cdot}x \equiv 1 \pmod{47}$

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. Montrer que si $a{\cdot}b \equiv 0 \pmod{47}$ alors :
$a \equiv 0 \pmod{47}$ ou $b \equiv 0 \pmod{47}$

b. En déduire que si $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$ alors :
$a \equiv 1 \pmod{47}$; $a \equiv -1 \pmod{47}$

3. a. Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que :
$p\times q \equiv 1 \pmod{47}$.

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que :
$p\times inv(p) \equiv 1 \pmod{47}$

Par exemple :
- $inv(1) = 1$ car $1\times 1 \equiv 1 \pmod{47}$
- $inv(2) = 24$ car $2\times 24 \equiv 1 \pmod{47}$
- $inv(3) = 16$ car $3\times 16 \equiv 1 \pmod{47}$

b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient :
$p = inv(p)$

c. Montrer que : $46! \equiv -1 \pmod{47}$

EXERCICE 15

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) :
$3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tels que :
$3{\cdot}u + 7{\cdot}v = 1$
En déduire une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G) :
$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Montrer que : $100 \equiv 2 \pmod{7}$.

Démontrer que si $(x;y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$.

b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7. En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

EXERCICE 16

Partie A - Restitution organisée des connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

Théorème de Bézout :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seuleemnt si, il existe un couple $(u;v)$ d'entiers relatifs vérifiant $a{\cdot}u + b{\cdot}v = 1$.

Théorème de Gauss :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit $b{\cdot}c$ et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c

1. En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
Déduire du théorème de Gauss que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 \pmod{p}$ et $a \equiv 0 \pmod{q}$, alors $a \equiv 0 \pmod{pq}$

Partie B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :
$$\begin{cases} n \equiv 9 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathcal{S}$.
On désigne par $(u;v)$ un couple d'entiers relatifs tels que :
$17{\cdot}u + 5{\cdot}v = 1$

a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u;v)$.

b. On pose $n_0 = 3\times 17u + 9\times 5v$.
Démontrer que n_0 appartient à $\mathcal{S}$.

c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathcal{S}$.

2. Caractérisation des éléments de $\mathcal{S}$.

a. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathcal{S}$.
Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$.

b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathcal{S}$ si, et seulement, si il peut s'écrire sous la forme $n = 43+85k$ où k est un entier relatif.

3. Application.
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons ?

5. *Arithmétique et géométrie :*

EXERCICE 17

1. a. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p+10$ et $p+20$, et un seulement est divisible par 3.

b. Les entiers naturels a, b et c sont dans cet ordre les trois premiers terme d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs $(u;v;w)$ tels que

$3u + 13v + 23w = 0$

a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w \pmod{3}$

b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leqslant r \leqslant 2$.
Montrer que les éléments de E sont de la forme :
$$\left(-13k - 23k' - 12r\,;3kr\,;3k' + r\right)$$

c. L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation $3x+13y+23z = 0$.
Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées $(x;y;z)$ entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

6. *Arithmétique et suite :*

EXERCICE 18

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.
En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le $PGCD$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

EXERCICE 19

1. Calculer le $PGCD$ de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit u la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5{\cdot}u_{n+1} - 4{\cdot}u_n \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

2. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u.

3. a. Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = 4{\cdot}u_n + 1$

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

   c. En déduire, pour tout entier naturel n, le $PGCD$ de u_n et u_{n+1}.

4. Soit v la suite définie pour tout entier anturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

   a. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   c. Déterminer, pour tout entier naturel n, le $PGCD$ de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

255. Exercices non-classés :

EXERCICE 20

Partie A

On admet que 1 999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour $PGCD$ 1 999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnu n appartenant à $\mathbb{N}$:

(E) : $n^2 - S{\cdot}n + 11\,994 = 0$ où S est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de S telle que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
   Si oui, préciser la deuxième solution.

2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?

3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994.
   En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1 999 est un nombre premier ?
Préciser le raisonnement employé ?
La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 ;	3 ;	5 ;	7 ;	11 ;	13 ;	17 ;	19
23 ;	31 ;	37 ;	41 ;	43 ;	47 ;	53 ;	59
61 ;	67 ;	71 ;	73 ;	79 ;	83 ;	89 ;	97

EXERCICE 21

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point,

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$

Proposition 2 : Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$ alors $x \equiv 0 \pmod{3}$

Proposition 3 : L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'ẑquation $12{\cdot}x - 5{\cdot}y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 10{\cdot}k\,; 9 + 24{\cdot}k)$ où $k \in \mathbb{Z}$

Proposition 4 : Il existe un seul couple $(a\,;b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $PPCM(a\,;b) - PGCD(a\,;b) = 1$

Deux entiers naturesl M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27.

EXERCICE 22

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :
   $$(x-1){\cdot}\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}\right) = x^k - 1$$
   Dans toute la suite de l'exercice, on consière un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n :
   $n = d{\cdot}k$
   Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

   b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur *pgcd*.

   a. On définit m' et n' par $m = d{\cdot}m'$ et $n = d{\cdot}n'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que :
   $m{\cdot}u - n{\cdot}v = d$.

   b. On suppose u et v strictement positifs.
   Montrer que : $\left(a^{m{\cdot}u} - 1\right) - \left(a^{n{\cdot}v} - 1\right){\cdot}a^d = a^d - 1$
   Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le *pgcd* de :
   $a^{m{\cdot}u} - 1$ et $a^{n{\cdot}v} - 1$

   c. Calculer, en utilisant le résultat précédent le *pgcd* de :
   $2^{63} - 1$ et $2^{60} - 1$

EXERCICE 23

Partie A : Restitution organisée de connaissance

Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

Montrer que si $a \equiv b \pmod{n}$ et si $c \equiv d \pmod{n}$ alors $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Partie B : Inverse de 23 modulo 26

On considère l'équation : (E) : $23x - 26y = 1$ où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-9\,;-8)$ est solution de l'équation (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire un entier a tel que :
$0 \leqslant a \leqslant 25$; $23a \equiv 1 \pmod{26}$

Partie C : Chiffrement de Hill

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

- **Etape 1** Chaque lettre du mot est remplacé par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers $(x_1\,;x_2)$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Etape 2** $(x_1\,;x_2)$ est transformé en $(y_1\,;y_2)$ tel que :
$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \pmod{26} \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \pmod{26} \end{cases}$$
avec $0 \leqslant y_1 \leqslant 25$ et $0 \leqslant y_2 \leqslant 25$

- **Etape 3** $(y_1\,;y_2)$ est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :

$$\underbrace{\text{TE}}_{\text{mot en clair}} \xrightarrow{\text{étape 1}} (19\,;4) \xrightarrow{\text{étape 2}} (13\,;19) \xrightarrow{\text{étape 3}} \underbrace{\text{NT}}_{\text{mot codé}}$$

1. Coder le mot ST.

2. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage :

   a. Montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système $(\mathcal{S}_1)$, vérifie les équations du système :
$$(\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 \pmod{26} \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

   b. A l'aide de la partie **B**, montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système $(\mathcal{S}_2)$, vérifie les équations du système :
$$(\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

   c. Montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système $(\mathcal{S}_3)$, vérifie les équations du système $(\mathcal{S}_1)$.

   d. Décoder le mot YJ

EXERCICE 24

Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :
$E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$
Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier, conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose : $M_k = 2^k - 1$.
On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. a. Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k									

   b. D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?

2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

   a. Justifier l'égalité :
$$1 + 2^p + (2^p)^2 + \cdots + (2^p)^{q-1} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$$

   b. En déduire que $2^{p\cdot q} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

   c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3. a. Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

   b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = {u_n}^2 - 2$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si, et seulement si, $u_{n-2} \equiv 0 \pmod{M_n}$.
Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.