L.KAYRIDINE JANOURA
MR : AMMAR BOUAJILA
GSM :92 741 567

SIMILITUDES

$4^{éme}$ MATHS — SERIE N°8

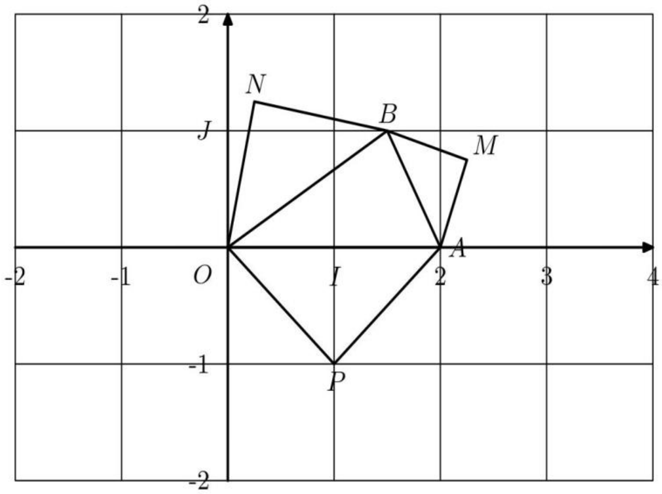
1. Similitudes directes :

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$z_A = 2 \quad ; \quad z_B = \frac{3}{2} + i$

On considère les points M, N et P tels que les triqngles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous :



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation :

$r = s_2 \circ s_1$

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. **A l'aide des transformations :**
   a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.
   b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.
   c. Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
   d. Quelle est l'image du point O par r ?
   e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.
2. **En utilisant les nombres complexes :**
   a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. a..
   b. En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.
   c. Donner, sans justification, l'affixe z_p du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u} ; \vec{v}\right)$ *(unité 1 cm)*. On construira une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

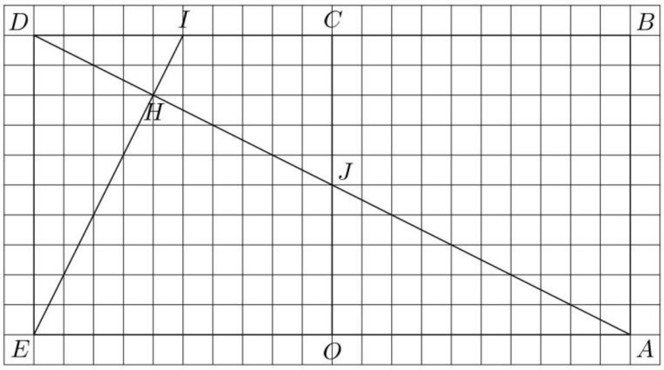
1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r. Montrer que B a pour affixe $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant : $\left\{-3 ; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i ; \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i ; -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$
3. a. Déterminer $r(F)$.
   b. Quelle est la nature du polygone $ABCDEF$?
4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de s' ? En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.
   b. Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?
   c. Déterminer l'écriture complexe de s'.
5. Soit A' le symétrique de A par rapport à C.
   a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(A')$ puis l'image de A' par $s' \circ s$.
   b. Calculer l'affixe du point A'. Retrouver alors le résultat du a. en utilisant l'écriture complexe $s' \circ s$.

EXERCICE 3

Sur la figure donnée ci-dessous, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{2}$$

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$, par J le milieu du segment $[OC]$ et par H le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$



1. Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E.

2. Déterminer le rapport de cette similitude s.

   On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\frac{\pi}{2}$.

3. Donner, sans justifier, l'image de B par s.

4. Déterminer et placer l'image de C par s.

5. Soit Ω le centre de la similitude s :

   a. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AI]$ et à celui de diamètre $[DE]$.

   b. Montrer que Ω ne peut être le point H.

   c. Construire Ω.

6. On considère le repère orthonormal direct $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)$

   a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.

   b. En déduire l'affixe du centre Ω de s.

EXERCICE 4

On considère un carré direct $ABCD$ *(c'est à dire un carré $ABCD$ tel que* $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$*)* de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$. Γ_1 désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que :
   $s(A)=I \quad ; \quad s(B)=K$

2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.

3. a. Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.

   b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
   (On pourra considérer la transformation $t=s\circ s$)

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(A;\frac{1}{10}\cdot\overrightarrow{AB};\frac{1}{10}\cdot\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.

2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe :
   $$z'=\frac{i}{2}\cdot z+5+5\cdot i$$

3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.

4. Calculer l'affixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.

5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

EXERCICE 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe :
$z'=\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\overline{z}$
où $\overline{z}$ désigne le conjugé de z.

Soient les points A et B d'affixes respectives :
$z_A=\sqrt{6}+i\cdot\sqrt{2} \quad ; \quad z_B=-\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{6}$

On note A' et B' les images respectives des points A et B par f.

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1. a. Ecrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.

   b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.

   c. En déduire la nature du triangle $OA'B'$.

   d. Montrer que l'affixe z'_A de A' vérifie l'égalité :
   $z_{A'}=2\cdot z_A$
   En déduire la construction de A' et B'.

2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et s la symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{u})$. On pose $g=r\circ s$.

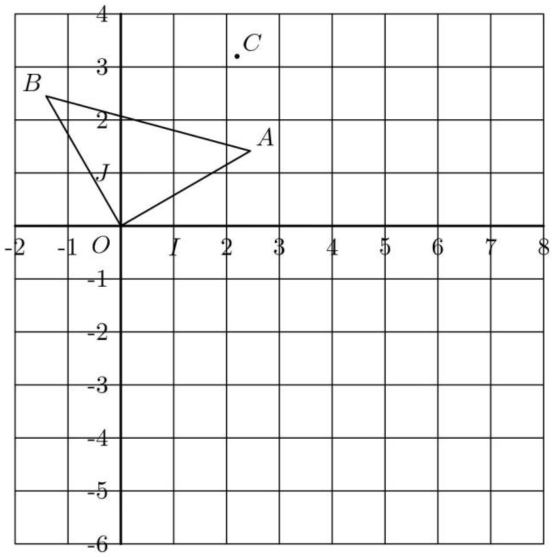
   a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.

   b. Montrer que les points O et A sont invariants par g.

   c. En déduire la nature de la transformation g.

3. a. Montrer que l'on peut écrire $f=h\circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.

   b. Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C' de C par la transformation f.



2. *Similitudes indirectes :*

EXERCICE 6

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considére les points A d'affixe 1 et B d'affixe 1. On appelle S la réflexion *(symétrie axiale)* d'axe (AB).
   Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe :
   $z' = -i{\cdot}\overline{z} + 1 + i$
2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.
3. On note f la composée $H \circ S$.
   a. Montrer que f est une similitude.
   b. Déterminer l'écriture complexe de f.
4. on appelle M' l'image d'un point M par f.
   a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = -{\cdot}\overrightarrow{AM}$ est la droite (AB).
   b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = {\cdot}\overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion *(symétrie axiale)* d'axe (AB).

   Montrer que l'image M' par S d'un point m d'affixe z a pour affixe :
   $z' = -i{\cdot}\overline{z} + 1 + i$
2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.
3. On note f la composée $H \circ S$.
   a. Montrer que f est une similitude.
   b. Déterminer l'écriture complexe de f.
4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.
   a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\overrightarrow{AM''} = -2{\cdot}\overrightarrow{AM}$
   est la droite (AB).
   b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\overrightarrow{AM''} = 2{\cdot}\overrightarrow{AM}$
   est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

EXERCICE 7

3. *Suites de points :*

EXERCICE 8

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique 4 cm)*.

Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.
   a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Montrer que l'écriture complexe de σ est :

$$z \longmapsto \frac{1+i}{2} z + 1 - i$$

c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que :

$$z - z' = i(2 - z')$$

2. a. **Question de cours**

- *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques modules et des arguments.*

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la roation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = i(p - a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2+i$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = \sigma(A_n)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$$

b. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :

pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

EXERCICE 9

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ *(unité graphique : 4 cm)*. Soit Ω le point d'affixe2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que l'écriture complexe de 4σ est :

$$z \longmapsto \frac{1+i}{2} \cdot z + 1 - i.$$

c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montre que $z - z' = i \cdot (2 - z')$

2. a. **Question de cours :**

Prérequis : définitions géométriques du module d'un complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'aqffixe q telle que $q - a = i \cdot (p - a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2+i$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :
pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = \sigma(A_n)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot e^{i\cdot\frac{(n+2)\pi}{2}} + 2$$

b. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

4. Arithmétiques :

EXERCICE 10

1. Le plan complexe est rapporté à un repère à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + i \quad ; \quad z_B = 5 + 2 \cdot i \quad , \quad z_C = i$$

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot i\right) \cdot \overline{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot i\right)$$

b. En déduire l'affixe de C', symétrique de C par rapport à (AB).

c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :

$$4 \cdot x + 3 \cdot y = 1$$

d. Vérifier que le point C appartient à $\mathcal{D}$.

2. a. Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.

b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser sont rapport.

c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.

d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation :

$$4 \cdot x + 3 \cdot y = 1.$$

b. Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

EXERCICE 11

ABC est un triangle équilatéral tel que :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\cdot k\cdot\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Soit t un nombre réel fixe et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par :

$$\overrightarrow{AM} = t\cdot\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BN} = t\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CP} = t\cdot\overrightarrow{CA}$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ direct.

On note a, b, c, m, n et p, les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P :

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

   a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.

   b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.
   On notera G ce centre de gravité.

   c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2\cdot\pi}{3}$.

   a. Vérifier que M est le barycentre du système de points : $\left\{ (A\,;1-t)\ ;\ (B\,;t) \right\}$
   et, en déduire que $r(M) = N$.
   On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

   b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}\,;\overrightarrow{GM}\right)$.
   Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P.

   c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ.