

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 2]$. Montrer que si $x \in [1; 2]$ alors $f(x) \in [1; 2]$.

2) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

$$v_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = f(v_n).$$

a) Construire la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.

Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, 1 \leq v_n \leq 2.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, v_{n+1} \leq v_n.$$

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, 1 \leq u_n \leq 2.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n \leq u_{n+1}.$$

c) Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$.

En déduire que pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \geq 0$ et

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n).$$

d) Montrer que pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α .

Déterminer la valeur exacte de α .

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1) a) Prouver que (u_n) est majorée par 4.

b) Prouver que (u_n) est strictement croissante.

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite

2) a) Prouver que pour tout n on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

b) retrouver le résultat du 1c)

c) Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par : $v_n = n^2(4 - u_n)$

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

1) Démontrer par récurrence que :

a) pour tout n , $u_n \geq 0$

b) Pour tout n : $u_n < 1$

2) Démontrer que la suite u_n est monotone et convergente.

3) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $\frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

4) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n et trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5) Trouver un entier N tel que, pour tout $n \geq N$: $u_n > 0,99$

1) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définie par : $u_n = \frac{n-1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ sont adjacentes puis trouver leur limite commune.

2) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes. Donner alors une approximation de leur limite à 10^{-2} .

3) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes. Donner alors une approximation de leur limite à 10^{-2} .

4) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies par $u_0 = 0$, et $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$$

a) Démontrer par récurrence que : $u_n \leq 1 \leq v_n$

b) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et trouver leur limite commune.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

1) Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.

3) Dédire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

4) On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante. En déduire la limite des suite (u_n) et (v_n) .

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

- 1) Calculer u_1 , v_1 , u_2 et v_2 .
- 2) Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
 - a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
 - b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n) .
- 3) Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n) , démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
- 4) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
 - a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
 - b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

1) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 2]$. Montrer que si $x \in [1; 2]$ alors $f(x) \in [1; 2]$.

2) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

$$v_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = f(v_n).$$

a) Construire la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.

Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, 1 \leq v_n \leq 2.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, v_{n+1} \leq v_n.$$

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, 1 \leq u_n \leq 2.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n \leq u_{n+1}.$$

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1) Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a .

2) En déduire que si a appartient à l'intervalle $] -1; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

On considère la suite définie par : $u_0=0$ et pour tout entier n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1° a) A l'aide de votre calculatrice, calculer les quatre premiers termes de cette suite.

b) Faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .

2°) On considère la fonction définie pour $x \in [0;3]$ par : $f(x)=\sqrt{2x+3}$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f .

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;3]$ et dresser son tableau de variations. Préciser les valeurs de la fonction aux bornes de cet intervalle.

c) Démontrer que : [si $x \in [0;3]$ alors $f(x) \in [0;3]$].

d) Démontrer par récurrence, que pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 3$

e) Démontrer par récurrence, que la suite (u_n) est strictement croissante.

f) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

g) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Boufouaa Chaouki

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + x - 3$.

1) On définit la suite (u_n) sur \mathbb{N} par $u_n = f(n)$.

a) (u_n) est-elle strictement croissante; strictement décroissante ? Justifier.

b) (u_n) est-elle minorée; majorée ? Si oui, donner un minorant (resp. un majorant) le plus précis possible.

2) On définit la suite (v_n) sur \mathbb{N} par $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = 1$.

a) Cette suite semble-t-elle majorée; minorée; monotone ?

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_n \leq 1$.

c) Déterminer le sens de variation de la suite (v_n) .

Une suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8}.$$

1) On pose $v_n = u_n^2 - 16$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa limite ?

2) Démontrer que, pour tout entier n , $|u_n - 4| \leq \frac{|v_n|}{4}$.

En déduire la limite de u_n .

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$$

On définit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

a. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.

b. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.

d. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite finie.

Boufouaa Chaouki