L.KAYRIDINE JANOURA	ARITHMETIQUE	
MR : AMMAR BOUAJILA		
GSM :92 741 567	$4^{éme}$ MATHS	SERIE N°9

Exercice corrigé

L'énoncé

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).
a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1129$.

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\,;y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.
Vérifier que le couple $(-25\,;9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0\,;v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1129$.
Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u\,;v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u\,;v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2.a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
En déduire, dans IN, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.
Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

CORRECTION

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :
$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.
1.On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).
a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1129$.

$$78\times\left(\frac{14}{39}\right)^3+u\left(\frac{14}{39}\right)^2+v\left(\frac{14}{39}\right)-14=0$$

$$2\times39\times\frac{14^3}{39^3}+u\frac{14^2}{39^2}+v\frac{14}{39}-14=0$$

$$2\times\frac{14^3}{39^2}+u\frac{14^2}{39^2}+v\frac{14}{39}-14=0$$

$$2\times\frac{14^2}{39^2}+u\frac{14}{39^2}+v\frac{1}{39}-1=0$$

$$2\times14^2+14u+39v-39^2=0$$

$$14u+39v=39^2-2\times14^2=1129$$

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\,;y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x+39y=1$.

$39 = 14\times2 + 11$; $14 = 11\times1 + 3$; $11 = 3\times3 + 2$; $3 = 2\times1 + 1$

$1 = 3 - 2$ et $2 = 11 - 3\times3$ alors $1 = 3 - (11 - 3\times3) = 4\times3 - 11$

Comme $3 = 14 - 11$ alors $1 = 4\times(14-11) - 11 = 4\times14 - 5\times11$

Comme $11 = 39 - 14\times2$ alors $1 = 4\times14 - 5\times(39-14\times2)$

$= 4\times14 - 5\times39 + 10\times14 = 14\times14 - 5\times39$.

Le couple $(14\,;-5)$ est solution de $14x + 39y = 1$.

Vérifier que le couple $(-25\,;9)$ est solution de cette équation.

$14\times(-25) + 39\times9 = -350 + 351 = 1$ donc $(-25\,;9)$ est solution de $14x + 39y = 1$.

c. En déduire un couple $(u_0\,;v_0)$ solution particulière de l'éq :$14u+39v = 1129$.

$(14\times1129\,;-5\times1129) = (15806\,;-5645)$ ou encore

$(-25\times1129\,;9\times1129) = (-28225\,;10161)$ sont des solutions particulières

de l'équation $14u+39v = 1129$.

Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u\,;v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

$14u + 39v = 1129$ et $14\times(-28225) + 39\times(10161) = 1129$

équivaut à $14(u + 28225) + 39(v - 10161) = 0$

équivaut à $14(u + 28225) = -39(v - 10161)$ (i)

14 divise $39(v - 10161)$ et $14 \wedge 39 = 1$ donc, d'après théorème de Gauss,

14 divise $v - 10161$ c'est-à-dire il existe un entier relatif k tel que $v = 14k + 10161$

En remplaçant dans (i) : $14(u + 28225) = -39\times14k$

On trouve $u + 28225 = -39k$ équivaut à $u = -39k - 28225$

Reciprόque: **$14(-39k - 28225) + 39(14k + 10161) = 1129$**

$S = \{(-39k - 28225 ; 14k + 10161)$ avec k entier relatif$\}$

d. Déterminer, parmi les couples $(u ; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

$k > \dfrac{28225}{39} \approx 724$, donc pour $k = -724$ on a : $u = 39\times724 - 28225 = 11$
et $v = 10161 - 724\times14 = 25$

Le couple solution avec le plus petit premier terme naturel est $(u ; v) = (11 ; 25)$.

2.a.Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
En déduire, dans IN, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

$78 = 2 \times 3 \times 13$ $D_{78} = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 13 ; 26 ; 39 ; 78\}$

$14 = 2 \times 7$ $D_{14} = \{1 ; 2 ; 7 ; 14\}$

b. Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :
$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.
Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

$$78\left(\frac{P}{Q}\right)^3 + u\left(\frac{P}{Q}\right)^2 + v\left(\frac{P}{Q}\right) - 14 = 0$$

$$78P^3 + uP^2Q + vPQ^2 - 14Q^3 = 0$$

En factorisant P on obtient : $P(78P^2 + uQ + vQ^2)=14Q^3$

En factorisant Q on obtient : $-78P^3 = Q(uP^2 + vPQ - 14Q^2)$

P divise $14Q^3$ or $P \wedge Q = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, P divise 14.

Q divise $78P^3$ or $P \wedge Q = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, Q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

$P \wedge Q = 1$ donc ne peuvent être pairs tous les deux. (cases grisées)

Voici donc les 20 solutions rationnelles positives possibles de l'équation (1) ; il y en a 20 autres négatives.

P

Q

	1	**2**	**7**	**14**
1				
2	$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{2}$	
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{14}{3}$
6	$\frac{1}{6}$		$\frac{7}{6}$	
13	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{14}{13}$
26	$\frac{1}{26}$		$\frac{7}{26}$	
39	$\frac{1}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{7}{39}$	$\frac{14}{39}$
78	$\frac{1}{78}$		$\frac{7}{78}$	