L.KAYRIDINE JANOURA	**ARITHMETIQUE**	
MR : AMMAR BOUAJILA		
GSM :92 741 567	$4^{éme}$ **MATHS**	**SERIE N°3**

Exercice 1

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose S = x + y et P = xy.

1) **a) Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S**
   b) En déduire que S et P sont premiers entre eux.
   c) Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair et l'autre impair).
2) **Déterminer les diviseurs positifs de 84.**
3) **Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que SP = 84.**
4) **Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :**

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \quad \text{avec } d = \text{PGCD}(a\,;b)$$

On pourra poser a = dx et b = dy avec x et y premiers entre eux.

Exercice 2 :

1) **Déterminer un couple d'entiers relatifs (x ;y) vérifiant :**

$$11x - 5y = 14.$$

2) **Résoudre dans ß^{2} l'équation 11x – 5y = 14.**
3) **Montrer qu'il existe un seul couple d'entiers relatifs (x ;y) tels que :**

$$11x - 5y = 14 \text{ et } 0 \le x \le 5.$$

Exercice 3 :

1) **Démontrer que, si le naturel n n'est pas un multiple de 7, alors $n^6 - 1$ est un multiple de 7.**
2) **Démontrer que le produit $n(n^6 - 1)$ est divisible par 42 quelque soit l'entier naturel n.**
3) **Comment choisir n pour que ce produit soit divisible par 84 ?**

CORRECTION

www.devoirat.net 2015

Correction Exercice 1 :

1) a) Soit $d = PGCD(x;S)$ $d \mid x$ et $d \mid x + y$; donc $d \mid x + y - x$;
soit $d \mid y$ $d \mid x$ et $d \mid y$ donc $d = 1$ car $PGCD(x;y) = 1$
$PGCD(x;S) = 1$ donc x et S sont premiers entre eux.

De même, on pose $d' = PGCD(y,S)$

$d' \mid y$ et $d' \mid x + y$; donc $d' \mid x + y - y$;
soit $d' \mid x$ $d' \mid x$ et $d' \mid y$ donc $d' = 1$ car $PGCD(x;y) = 1$

$PGCD(y;S) = 1$ donc y et S sont premiers entre eux.

b) $PGCD(x;S) = 1$ et $PGCD(y;S) = 1$ ⟹ $PGCD(xy;S) = 1$
Donc S et P sont premiers entre eux.
En effet, si $PGCD(x;S) = 1$ alors selon le théorème de Bézout, il existe u et v entiers tels que $xu + Sv = 1$.

De même, si $PGCD(x;S) = 1$ alors selon le théorème de Bézout, il existe u' et v' entiers tels que $yu' + Sv' = 1$.

En multipliant membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$(xu + Sv)(yu' + Sv') = 1$
Soit, en développant le membre de gauche :

$$xyuu' + S(xuv' + vyu' + Svv') = 1$$

uu' et $xuv' + vyu' + Svv'$ sont des entiers, donc, selon le théorème de Bézout, xy et S sont premiers entre eux.

c) Raisonnons par disjonction des cas selon les parités possibles de x et y.
x et y ne sont pas pairs car sinon $PGCD(x;y) \geq 2$.
Si x et y sont impairs, alors $x + y$ est pair et xy est impair.

Si x et y sont de parités différentes, alors $x + y$ est impair et xy est pair.
Dans tous les cas, P et S sont de parités différentes.

2) Les diviseurs positifs de 84 sont :
1 - 2 - 3 - 4 - 6 - 7 - 12 - 14 - 21 - 28 - 42 – 84.

3) Les produits d'entiers naturels premiers entre eux égaux à 84 sont :
1×84 ; 3×28 ; 4×21 ou 7×12.

Si $S = x + y$ et $P = xy$ alors x et y sont solutions de l'équation du second degré : $X^2 - SX + P = 0$.

www.devoirat.net 2015

Donc le discriminant est $6 = S^2 - 4P$.

Pour obtenir des solutions entières le discriminant doit être un carré parfait. <u>Etudions tous les cas possibles</u> :

- $S = 1$ et $P = 84$: impossible car $S = x + y \geq 2$ car x et y sont non nuls.
- $S = 84$ et $P = 1$: $P = xy = 1$ ⓪ $x = y = 1$ et $S = 2$?? 84
- $S = 3$ et $P = 28$: $6 = 3^2 - 42\times 8 < 0$
- $S = 28$ et $P = 3$: $6 = 28^2 - 4\times 3 = 772$ qui n'est pas un carré parfait.
- $S = 4$ et $P = 21$: $6 = 4^2 - 4\times 21 < 0$
- $S = 21$ et $P = 4$: $6 = 21^2 - 4\times 4 = 425$ qui n'est pas un carré parfait
- $S = 7$ et $P = 12$: $6 = 7^2 - 4\times 12 = 1 = 1^2$

Les solutions sont alors $x = \dfrac{7+1}{2} = 4$ ou $x = \dfrac{7-1}{2} = 3$.

Les couples (x ;y) possibles sont donc (3 ;4) ou (4 ;3).

On vérifie que 3 et 4 sont bien premiers entre eux.

- $S = 12$ et $P = 7$: $6 = 12^2 - 4\times 7 = 116$ qui n'est pas un carré parfait

<u>Conclusion</u> : Les couples (x ;y) d'entiers naturels premiers entre eux vérifiant $(x + y)xy = 84$ sont (3 ;4) et (4 ;3).

4) On pose $a = dx$ et $b = dy$ avec PGCD(x ;y) = 1 Le système s'ecrit alors $\begin{cases} d(x+y) = 84 \\ xy = d \end{cases}$

d est diviseur de 84 ; on alors Le système : $\begin{cases} x + y = \dfrac{84}{d} \\ xy = d \end{cases}$.

En posant $S = \dfrac{84}{d}$ et $P = d$ on se ramène au problème de la question précédente.

On sait que ce système a des solutions entières pour $P = 12$.

Soit $d = 12$; on vérifie alors que $\dfrac{84}{12} = 7 = S$.

Les solutions en (x ;y) sont (3 ;4) et (4 ;3).

Les solutions en (a ;b) sont donc $(31\times 2\ ;41\times 2) = (36\ ;48)$ et (48 ;36).

www.devoirat.net 2015

Correction Exercice 2 :

1) Le couple (1,2) est solution de l'égalité de Bézout correspondante : $11x - 5y = 1$ car $11\times1 - 5\times2 = 1$.
On en déduit que le couple (14 ;28) est une solution particulière de l'équation $11x - 5y = 14$.

2) Soit (x ;y) un couple solution de l'équation, on a alors le système :

$$\begin{cases} 11x - 5y = 14 \\ 11\times14 - 5\times28 = 14 \end{cases}$$

Par soustraction membre à membre, on obtient : $11(x - 14) - 5(y - 28) = 0$
Soit $11(x - 14) = 5(y - 28)$

Donc 5 divise $11(x - 14)$.

Or 5 et 11 sont premiers entre eux ; donc, selon le théorème de Gauss, 5 divise $x - 14$. Il existe donc k entier tel que $x = 14 + 5k$.

On a alors : $11\times5k = 5(y - 28)$
Soit : $y = 28 + 11k$

Les solutions entières de l'équation $11x - 5y = 14$ sont les couples $(14 + 5k ;28 + 11k)$ avec k entier relatif.

Réciproquement, on vérifie que les couples de la forme $(14 + 5k ;28 + 11k)$ avec k entier relatif vérifient bien l'équation.

3) $0 \le x \le 5$ ⓪ $0 \le 14 + 5k \le 5$ ⓪ $-14 \le 5k \le -9$
⓪ $k = -2$

Le seul couple solution cherché est donc (4 ;6).

www.devoirat.net 2015

Correction Exercice 3 :

1) C'est une application directe du petit théorème de Fermat car 7 est premier et n n'étant un multiple $\equiv$ 7, alors $n^{7-1} \div 1\,[7]$.
Donc $n^6 - 1$ est divisible par 7.

2) La décomposition en produit de facteurs premiers de 42 est : $42 = 2\times3\times7$.
$n^2 \equiv n\,[2]$ car 2 est premier.
$n^7 = (n^2)^3 \times n \equiv \cdot n^3 \times n \equiv n^4 \equiv n^2 \equiv n\,[2]$
Donc $n^7 - n$ est divisible par 2.

$n^3 \equiv n\,[3]$ car 3 est premier.

$n^7 = (n^3)^2 \times n \equiv n^2 \times n \equiv n^3 \equiv n\,[3]$
Donc $n^7 - n$ est divisible par 3.

www.devoirat.net 2015