

EXERCICE 1

Déterminer les entiers naturels x et y tels que : $x + y = 182$ et $\text{PGCD}(x ; y) = 13$

EXERCICE 2

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E) :

$$16x - 3y = 4.$$

1. Vérifier que le couple $(1, 4)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation (E).

EXERCICE 3

1. a. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.

b. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

c. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

2. On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$. On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1} .

a. Montrer que d_n divise 2^n .

b. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p . Justifier.

CORRECTION EXERCICE N°1

$\text{PGCD}(x ; y) = 13$ donc il existe deux entiers naturels a et b

premiers entre eux tels que $x = 13a$ et $y = 13b$ $x + y = 182 \Leftrightarrow 13$

$$(a + b) = 182 \Leftrightarrow a + b = 14$$

$a + b = 14$ donc si a est pair alors b l'est aussi or a et b sont premiers entre eux donc ce cas est exclu

a	1	3	5	7	9	13
b	13	11	9	7	5	1
$x = 13a$	13	39	65		117	169
$y = 13b$	169	143	117		65	13

Le cas $a = 7$ et $b = 7$ est exclu car a et b sont premiers entre eux.
 $\left\{ \begin{array}{l} a + b = 14 \\ x + y = 182 \end{array} \right.$

Les solutions de $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 182 \\ \text{PGCD}(x ; y) = 13 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 182 \\ \text{PGCD}(x ; y) = 13 \end{array} \right.$$

sont les couples $(13 ; 169)$ $(39 ; 143)$ $(65 ; 117)$ $(117 ; 65)$ et $(169 ; 13)$

CORRECTION EXERCICE 2

On cherche l'ensemble des couples d'entiers (x, y) solutions de l'équation (E) : $16x - 3y = 4$.

1. $16 \times 1 - 3 \times 4 = 16 - 12 = 4$ donc le couple $(1, 4)$ est une solution particulière de (E).

2. Le couple d'entiers relatifs (x, y) est solution de l'équation (E) : $16x - 3y = 4$
 $\left\{ \begin{array}{l} 16x - 3y = 4 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} 16 \times 1 - 3 \times 4 = 4 \end{array} \right.$ donc par différence membre à membre : $16(x - 1) - 3(y - 4) = 0$

soit $16(x - 1) = 3(y - 4)$

16 divise $3(y - 4)$, 16 est premier avec 3 donc d'après le théorème de Gauss,

16 divise $y - 4$ il existe un entier relatif k tel que $y - 4 = 16k$

en remplaçant dans $16(x - 1) = 3(y - 4)$ alors $x - 1 = 3k$

donc $x = 3k + 1$ et $y = 16k + 4$

Vérification : $16(3k + 1) - 3(16k + 4) = 16 - 3 \times 4 = 4$

L'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont de la forme $(3k + 1; 16k + 4)$ avec k entier relatif quelconque.

CORRECTION EXERCICE 3

1. a. $2009 = 11 \times 182 + 7$ donc le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11 est 7.

b. $2^4 = 16$ donc $2^4 \equiv 5 \pmod{11}$ donc $(2^4)^2 \equiv 5^2 \pmod{11}$ soit $2^8 \equiv 3 \pmod{11}$

$2^{10} = 2^8 \times 2^2$ donc $2^{10} \equiv 3 \times 4 \pmod{11}$ soit $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

c. $2^{2009} = 2^{2000} \times 2^9 = (2^{10})^{200} \times 2^9$ donc $2^{2009} \equiv 2^9 \pmod{11}$ or $2^8 \equiv 3 \pmod{11}$ donc $2^9 \equiv 3 \times 2 \pmod{11}$ soit $2^9 \equiv 6 \pmod{11}$

$2^{2009} \equiv 6 \pmod{11}$ et $2009 \equiv 7 \pmod{11}$ donc $2^{2009} + 2009 \equiv 13 \pmod{11}$ donc $2^{2009} + 2009 \equiv 2 \pmod{11}$
Le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11 est 2.

2. a. $A_n = 2^n + p$ et $A_{n+1} = 2^{n+1} + p = 2 \times 2^n + p$
 $A_{n+1} - A_n = 2^n + p - (2^n + p) = 2^n$

d_n est le PGCD de A_n et A_{n+1} donc d_n est le PGCD de A_n et $A_{n+1} - A_n$ donc d_n est le PGCD de A_n et 2^n donc d_n divise 2^n .

b. $n \geq 1$ donc 2^n est un multiple de 2 donc un nombre pair donc $2^n + p$ a la même parité que p