## Exercice n°1 :

I. Donner la réponse exacte.

1) Soit la suite U définie par son premier terme $U_0$ et $U_{n+1} = 2U_n + 3$.
   a) U est une suite géométrique.
   b) La suite V définie par $V_n = U_n + 3$ est une suite géométrique.
   c) Pour tout $n \in IN$ , $U_n = 2^n (U_0 + 3) - 3$.
2) On considère les suites U , V et W telles que pour tout n, on a : $U_n \le V_n \le W_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors :
   a) $\lim_{n\to+\infty} W_n = +\infty$ b) $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ c) $(W_n)$ n' a pas de limite.

II. Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1) U converge ssi $U^2$ converge.
2) Si U est bornée alors U converge.
3) Si $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right) = \ell$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \ell$.
4) Deux suites qui convergent vers un même limite sont adjacentes.
5) Si $U_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ alors U converge vers 1.
6) La suite $W_n = \frac{1}{n} + \sin(n)$ est convergente.
7) La suite T définie pour tout n>0 $T_n = \frac{2n + (-1)^n}{n}$ converge vers 2.

## Exercice n°2 :

Soit $\alpha$ un réel appartenant à ]0,1[.On considère la suite $(U_n)$ définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)U_n - \alpha}{U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout n de IN , on a : $U_n \ge 1$.
   b) Montrer que $(U_n)$ est une suite décroissante.
   c) En déduire que la suite $(U_n)$ est convergente et trouver sa limite.
2) Soit $(V_n)$ la suite définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$.
   a) Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera son premier terme et sa raison.
   b) Exprimer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de $n$.
   c) Retrouver alors la limite de la suite $(U_n)$.

## Exercice n°3 :

On considère la suite $(U_n)$ définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6 - U_n^{\,2}}} \end{cases}$

1) Calculer $U_1$ et $U_2$.

2) a) Montrer que pour tout n de IN , on a : $0 \le U_n < \sqrt{3}$.

b) Montrer que $(U_n)$ est une suite croissante.

c) En déduire que la suite $(U_n)$ est convergente et trouver sa limite.

3) Soit $(V_n)$ la suite définie sur IN par : $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}$.

a) Montrer que $(V_n)$ est une suite arithmétique dont on déterminera son premier terme et sa raison.

b) Exprimer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de $n$.

c) Retrouver alors la limite de la suite $(U_n)$.

**Exercice n°4 :**

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite réelle définie par son premier terme $U_0 \in \mathrm{IR}_+^* / \{1\}$ et par la relation de récurrence $U_{n+1} = U_n - U_n^2$.

1) a) Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante.

b) Montrer que si la suite $(U_n)$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

2) On suppose que $U_0 > 0$.

a) Montrer que pour tout n de IN$^*$, $U_n \le U_1 < 0$.

b) Montrer alors que la suite $(U_n)$ diverge. Quelle est sa limite ?

c) On pose pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{1-U_k}$. Vérifier que $\dfrac{1}{1-U_k} = \dfrac{1}{U_{k+1}} - \dfrac{1}{U_k}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Dans la suite , on suppose que $0 < U_0 < 1$.

3) a) Montrer que pour tout n de IN , $0 < U_n < 1$ et en déduire que $(U_n)$ converge.

b) On pose pour tout $n \in \mathrm{IN}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (U_k)^2$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathrm{IN}$ ,$U_n < \dfrac{1}{n+1}$.(On pourra utiliser les variations de $x \mapsto x - x^2$ sur [0,1]).

b) Soit la suite $(V_n)$ définie sur IN par $V_n = nU_n$.

Montrer que la suite $(V_n)$ est croissante et qu'elle convergente vers un réel $\ell \le 1$.

**Exercice n°5 :**

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 \in \mathrm{IR}_+^*$ et $\forall n \in \mathrm{IN}$, $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{\sqrt{3+U_n^2}}$.

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathrm{IN}\ U_n > 0$.

b) Pour quelle valeur $U_0 = \alpha$ la suite U est constante ?

On suppose pour la suite de l'exercice que $U_0 \ne \alpha$.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathrm{IN}\ (U_{n+1} - \alpha)$ et $(U_n - \alpha)$ ont même signe ?

b) Etudier la monotonie de la suite U dans chacun des cas suivants : $U_0 \in ]0,\alpha[$ ; $U_0 \in ]\alpha,+\infty[$.

c) En déduire que dans chaque cas la suite U est convergente et calculer sa limite $\ell$.

**Exercice n°6 :**

1) Soit la suite $(U_n)$ définie sur IN par $U_0=1$ ; $U_1=2$ et $U_{n+2}=\frac{5}{4}U_{n+1}-\frac{1}{4}U_n \quad \forall n\in \mathbb{N}$ .On définie la suite $(V_n)$ sur IN par : $V_n=U_{n+1}-U_n$.
   a) Montrer que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique convergente.
   b) Calculer $(U_n)$ en fonction de n. En déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.
2) On définit la suite $(W_n)$ définie sur IN par $W_n=(2n+1)V_n$.
   a) Montrer que la suite $(W_n)$ est décroissante et qu'elle est convergente.
   b) Montrer que $\forall n\in \mathbb{N}$, $W_{n+1}=\frac{1}{4}W_n+\frac{1}{2}V_n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.
3) Soit la suite $(S_n)$ définie sur IN par : $S_n=\sum_{k=0}^{n}W_k$ .
   a) Montrer que $S_n-\frac{1}{4}S_n=1-\frac{1}{4}W_n+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$ .
   b) En déduire que la suite $(S_n)$ est convergente et calculer sa limite.
4) On définit la suite $(T_n)$ sur IN par : $T_0=1$ et $T_{n+1}=\frac{1}{2}\left(T_n+\sqrt{T_n^{\,2}+W_n}\right)$.
   a) Montrer que la suite $(T_n)$ est minorée par 1 et strictement croissante.
   b) Montrer que $\forall n\in IN; 0<T_{n+1}-T_n<\frac{1}{4}W_n$ . En déduire que la suite $(T_n)$ est convergente et que sa limite $\ell$ vérifie $1\leq \ell\leq\frac{14}{9}$.

**Exercice n°7 :**

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0=\frac{1}{2} \\ U_{n+1}=\dfrac{3U_n^{\,2}+1}{2U_n^{\,2}+2}\end{cases}$

1) a) Etudier les variations sur [0,1] de la fonction $x\mapsto \dfrac{3x^2+1}{2x^2+2}$.
   b) Montrer par récurrence que pour tout n de IN on a : $\frac{1}{2}\leq U_n\leq 1$ et que la suite U est croissante.
   c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.
2) a) Montrer que pour tout n de IN on a : $|U_{n+1}-1|\leq\frac{4}{5}|U_n-1|$ et $|U_n-1|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ .
   b) Retrouver la limite de la suite U.
3) On considère la suite S définie par : $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(U_k-1)$.Montrer que la suite S est décroissante et qu'elle est convergente.
4) On considère la suite V telle que $\begin{cases} V_0=1 \\ V_{n+1}=V_n-\sqrt{V_n^{\,2}+U_n}\end{cases}$

a) Montrer que pour tout n de IN on a : $V_{n+1} - V_n \leq -U_n$.

b) En déduire pour tout n de IN$^*$ on a : $V_n \leq -n + 1 - S_n$.

c) Déterminer alors la limite de la suite V.

**Exercice n°8 :**

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_n = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) U_{n-1} \end{cases}$ pour tout n de IN$^*$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^* \; U_n > 0$.

b) Exprimer $U_n$ en fonction de n.

2) On pose : pour tout n de IN , $V_n = \sqrt{n} U_n$ et $W_n = \sqrt{n+1} U_n$

a) Montrer que la suite V est croissante et la suite W est décroissante.

b) En déduire que pour tout n de IN$^*$ $\dfrac{1}{4\sqrt{n}} \leq U_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

c) Montrer que la suite U est convergente et calculer sa limite.

d) Montrer que les suites U et W sone adjacentes.

**Exercice n°9 :**

On définit deux suites $(U_n)$ et $(V_n)$ par : $U_1 = 12$, $V_1 = 1$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3}$, $V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3U_n}{4}$

1) Pour tout entier n ≥ 1, on pose $W_n = U_n - V_n$. Montrer que $(W_n)$ est une suite géométrique à termes positifs, déterminer sa limite et exprimer $W_n$ en fonction de n.

2) Démontrer que la suite $(U_n)$ est décroissante et que la suite $(V_n)$ est croissante.

3) Pour tout entier n ≥ 1, démontrer que $U_n \geq V_n$. En déduire que $U_1 \geq U_n \geq V_n \geq V_1$.

4) Pour tout entier n ≥ 1, on pose $T_n = 3U_n + 8V_n$. Démontrer que $(T_n)$ est une suite constante.

5) En déduire les expressions de $U_n$ et $V_n$ en fonction de n, puis les limites de $(U_n)$ et $(V_n)$.