Exercice n°1 :

A) Pour tout nombre complexe z, on note $P(z)=z^3-4z^2+8z-8$.

1) Calculer $P(2)$. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $P(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$P(z)=(z-2)\left(z^2-2z+4\right).$$

2) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $z^2-2z+4=0$.
En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, de l'équation $P(z) = 0$.

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a=2$, $b=1+i\sqrt{3}$ et $c=1-i\sqrt{3}$.

1) a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
b) Démontrer que les points A, B et C sont sur un même cercle Γ de centre O.
c) Construire le cercle Γ.

2) Déterminer un argument du nombre complexe b. Quelle est la nature du triangle OAB ?

Exercice n°2 :

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation : $z^2-2z+1+a^2=0$.

1) Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation E.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 + ia et 1 – ia . On pose $a=a_1+ia_2$; a_1 et a_2 réels.

a) Montrer que les points O,A et B sont alignés si seulement si $a_1=0$.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si est seulement $|a|=1$.

3) On suppose que $a=e^{i\alpha}$ où $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

a) Vérifier que pour tout réel x , on a : $1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}$, $1-e^{ix}=-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}$.

b) En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes 1 +ia et 1 – ia.

c) Déterminer a pour que O,A et B forment un triangle isocèle en O.

Exercice n°3 :

Pour tout nombre complexe z on pose : $f(z)=z^3+2\left(-\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1-i\sqrt{3}\right)z+8i$.

1) a) Montrer que l'équation f (z) = 0 possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
b) Résoudre alors l'équation f (z) = 0. On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, z_1 étant celle qui a une partie imaginaire négative.

2) On pose $w=\frac{z_1}{z_0}$.

a) Donner la forme trigonométrique de w.

b) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Atout nombre complexe z non nul on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives z , wz et w^2z.
Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

Exercice n°4 :

Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi[$. On considère dans **C** l'équation (E) : $z^2-2i\sin\theta\, z-2(1+\cos\theta)=0$.

1) a) Résoudre dans **C** l'équation (E). On note z' et z'' les racines de (E) avec Re(z')>0.

   b) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle. En déduire la forme exponentielle de $\frac{z''}{z'}$.

2) Soit M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z'' dans le plan P rapporté à un RON $(O,\vec{u},\vec{v})$.

   a) Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à la droite $(O,\vec{v})$.

   b) Déterminer l'ensemble (γ') des points M' lorsque θ varie.

   En déduire l'ensemble (γ'') des points M'' lorsque θ varie.

   c) Déterminer θ pour que le triangle OM'M'' soit rectangle et isocèle en O et de sens direct.

Exercice n°5 :

A) On considère l'équation $(E_\alpha): 2z^2-2z-i\sin(2\alpha)e^{2i\alpha}=0$ où $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   1) a) Résoudre dans **C**, l'équation $\left(E_{\frac{\pi}{4}}\right)$.

      b) En déduire les solutions de l'équation $(E): -2z^2-2iz+1=0$.

   2) a) Vérifier que $1+2i\sin(2\alpha)e^{2i\alpha}=e^{4i\alpha}$.

      b) Résoudre dans **C** ; l'équation (E_α). Mettre les solutions sous forme exponentielle.

B) Soit M' et M'' les points d'affixes respectives $z'=\cos(\alpha)e^{i\alpha}$ et $z''=\sin(\alpha)e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$.

   1) a) Montrer que OM'M'' est un triangle rectangle en O.

      b) Pour quelle valeur de α le triangle OM'M'' est isocèle.

   2) a) Vérifier que l'affixe du point **I = M' * M''** est indépendant de α .

      b) Ecrire z' – z'' sous forme exponentielle. En déduire M'M''.

      c) Montrer que les points M' et M'' varies sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice n°6 :

Soit P le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi]$. On considère l'équation $(E): z^2-(1+i)(1+e^{i\theta})z+i(e^{2i\theta}+1)=0$.

1) Résoudre dans **C** l'équation (E).

2) On pose $z=i+e^{i\theta}$; $z'=1+ie^{i\theta}$ et $z_0=1+i$. Soit M, M' et A les points d'affixes respectives z , z' et z_0.

   a) Donner la forme exponentielle éventuelle suivant θ des complexes z' et z.

   b) En déduire que O, M et M' sont alignés.

3) On désigne par (Γ) et (Γ') les ensembles des points M et M' respectivement lorsque θ varie.

   a) Déterminer et construire (Γ) et (Γ') .

   b) En déduire une construction de M' connaissant M