

EXERCICE N1 :

On considère la suite réelle (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$
 b) Etudier la monotonie de (u_n) . En déduire qu'elle converge puis donner sa limite L.
- 2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n)$
 b) A l'aide de raisonnement par récurrence, déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$
- c) Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $v_n = \frac{S_n}{n}$ et $w_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$
 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n - \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] \leq S_n < n$
 b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

EXERCICE N2 :

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 6 \cdot u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Calculer u_2 et u_3 .
- 2) Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $v_n = u_n + 2 \cdot u_{n-1}$
 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et en déduire v_n en fonction de n.
 b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3^{n+1}}{5} \left[1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right]$
- 3) Soit (W_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $W_n = u_n - 3 \cdot u_{n-1}$.
 Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison (-2) et en déduire W_n en fonction de n.
- 4) a) Montrer que $u_n = a \cdot v_{n+1} + b \cdot W_{n+1}$ avec a et b deux réels qu'on précisera.
 b) En déduire la somme $S = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n.

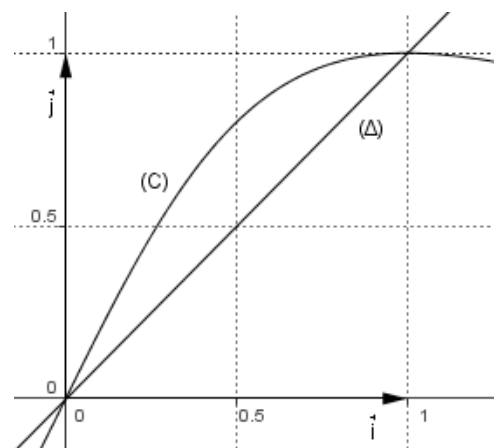
EXERCICE N3 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

Dans le graphique ci-contre on a tracé une partie de la courbe (C) de f et la droite $\Delta : y=x$. Soit la suite réelle (u_n) définie sur

$$\mathbb{N} \text{ par : } \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- 1) Indiquer sur l'axe des abscisses (O, \vec{i}) les quatre premiers termes de la suite (u_n) sans les calculer.
 Que peut-on conjecturer à propos de la monotonie de la suite (u_n) et de sa convergence.
- 2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f
 b) Etudier le signe de $f(x) - x$ suivant les valeurs de x dans $[0, 1]$.
- 3) En déduire que : a) $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 b) La suite (u_n) est croissante
- 4) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite L



EXERCICE N4 :

Soit (a_n) une suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n^2}}$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < a_n \leq 1$
b) Etudier la monotonie de (a_n) , puis déduire qu'elle converge et calculer sa limite L .
- 2) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$, on a : $\frac{\tan x}{1 + \sqrt{1 + (\tan x)^2}} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$. Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$
 - a) Calculer : u_0 et v_0
 - b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite L .
 - c) Montrer que $2 - \sqrt{2} \leq L \leq 1$

EXERCICE N5 :

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

- 1) Montrer que suite (u_n) est croissante
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n \geq \sqrt{n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N6 :

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{n!}{3^n}$

- 1) a) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{4}{3}$ pour tout entier naturel $n \geq 3$
b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a : $u_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} u_3$.
c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 2) On pose $S_n = \sum_{k=3}^n \frac{3^k}{k!}$
 - a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a : $S_n \leq \frac{1}{u_3} \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{3}{4}\right)^k$
 - b) En déduire que pour tout $n \geq 3$, on a : $S_n \leq \frac{4}{u_3}$

EXERCICE N7:

Soit (u_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N}^* par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

- 1) a) Calculer : u_2 , u_3 et u_4 .
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = 2 - 4 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2^n}$
c) En déduire la valeur de $\sin \frac{\pi}{8}$
- 2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - 2|$
b) En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.
c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N8:

On considère les suites réelles (x_n) et (y_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$x_0 = 1, y_0 = 2, x_{n+1} = \frac{2x_n \cdot y_n}{x_n + y_n} \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < x_n < y_n$
- 2) Montrer que la suite x est croissante et que la suite y est décroissante.
- 3) a) Montrer que $y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(y_n - x_n), \forall n \in \mathbb{N}$
b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- 4) Montrer alors que les suites x et y convergent vers la même limite L .
- 5) Montrer que $1 \leq L \leq 2$
- 6) On pose $t_n = x_n \cdot y_n, \forall n \in \mathbb{N}$
 - a) Montrer que la suite (t_n) est constante.
 - b) En déduire la valeur de L .

EXERCICE N9:

Soit (a_n) une suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n^2}}$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < a_n \leq 1$
b) Etudier la monotonie de (a_n) , puis déduire qu'elle converge et calculer sa limite L .
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$
 - a) Calculer : u_0 et v_0
 - b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite L .
 - c) Montrer que $2 - \sqrt{2} \leq L \leq 1$

EXERCICE N10:

Soit (u_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{(-1)^n}{n}$

On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

- 1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4
- 2) a) Montrer que la suite (v_n) est croissante.
b) Montrer que $v_n \leq 1 - \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
c) En déduire que la suite (v_n) est convergente.
- 3) a) Montrer que la suite (w_n) est décroissante.
b) Montrer que $w_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
c) En déduire que la suite (w_n) est convergente.
- 4) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite α . Que peut-on en déduire ?
- 5) Donner un encadrement de α .